546-3 Une extension de l'inégalité de Nesbitt

Soient a , b et c des réels strictement positifs , montrons l'inégalité :
$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$.

$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$.
$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}+\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{a+c}+\frac{c^2}{a^2+c^2}-\frac{c}{a+b}\geq 0$

$\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}+\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{a+c}+\frac{c^2}{a^2+c^2}-\frac{c}{a+b}=$
$\frac{a^2(b+c)-a(b^2+c^2)}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{b^2(a+c)-b(a^2+c^2)}{(a+c)(a^2+c^2)}+\frac{c^2(a+b)-c(a^2+b^2)}{(a+c)(a^2+c^2)}$

Notons $M=max\ ((b+c)(b^2+c^2),(a+c)(a^2+c^2),\ (a+c)(a^2+c^2))$

$\frac{a^2(b+c)-a(b^2+c^2)}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{b^2(a+c)-b(a^2+c^2)}{(a+c)(a^2+c^2)}+\frac{c^2(a+b)-c(a^2+b^2)}{(a+c)(a^2+c^2)}$
$\geq\frac{a^2(b+c)-a(b^2+c^2)}{(M}+\frac{b^2(a+c)-b(a^2+c^2)}{M}+\frac{c^2(a+b)-c(a^2+b^2)}{M}$
$\geq\frac{a^2b+a^2c-ab^2-ac^2+b^2a+b^2c-ba^2-bc^2+c^2a+c^2b-ca^2-cb^2}{M}$
tous les termes du numérateur s'annulent deux à deux .
$a^2b+a^2c-ab^2-ac^2+b^2a+b^2c-ba^2-bc^2+c^2a+c^2b-ca^2-cb^2=0$
on en déduit que :
$\frac{a^2(b+c)-a(b^2+c^2)}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{b^2(a+c)-b(a^2+c^2)}{(a+c)(a^2+c^2)}+\frac{c^2(a+b)-c(a^2+b^2)}{(a+c)(a^2+c^2)}\geq 0$
donc $\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}+\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{a+c}+\frac{c^2}{a^2+c^2}-\frac{c}{a+b}\geq 0$
$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$