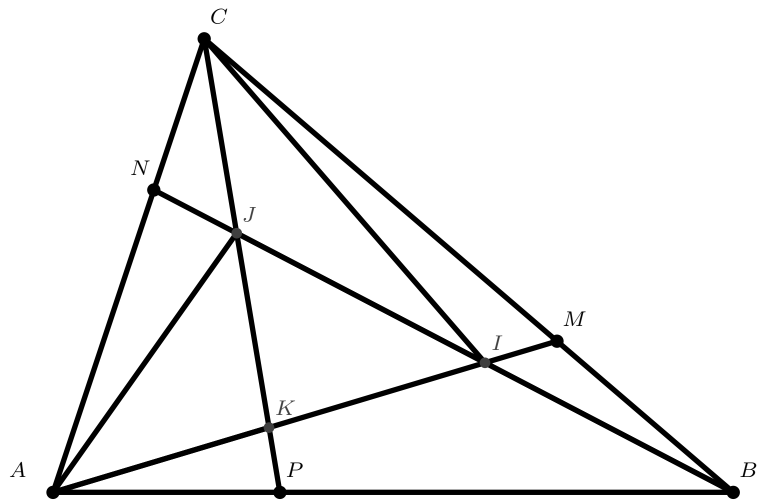
546.4 Heptasection d'un triangle



Notons $Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ le barycentre des points A et B affectés des coefficients α et β respectivement.
$M = Bar\{(B,2),(C,1)\}$; $N = Bar\{(C,2),(A,1)\}$ $P = Bar\{(A,2),(B,1)\}$
Les droites (AM) et (BN) se coupent en I ; les droites (BN) et (CP) se coupent en J ; les droites (CP) et (AM) se coupent en K .

Il faut établir que l'aire du triangle IJK est égale au septième de l'aire du triangle ABC.

En observant la figure , il semble que K soit le milieu du segment $[AI]$, que I soit le milieu du segment $[BJ]$, et que J soit le milieu du segment $[CK]$.

Démontrons que K soit le milieu du segment $[AI]$.

K est le point d'intersection des droites (CP) et (AM) ,
Comme $K \in [CP]$, K est le barycentre des points C et P affectés de coefficients .
de même $K \in [AM]$ donc K est le barycentre des points A et M affectés de coefficients .
$P = Bar\{(A,2),(B,1)\}$, d'après une propriété du barycentre , $P = Bar\{(A,4),(B,2)\}$
$M = Bar\{(B,2),(C,1)\}$
ce qui conduit à considérer le point $X = Bar((A,4),(B,2),(C,1)\}$.
D'après la propriété de l'associativité du barycentre , $X = Bar\{(P,6),(C,1)\}$ donc $X \in (PC)$ et $X = Bar\{(A,4),(M,3)\}$ donc $X \in (AM)$
le point X est le point d'intersection des droites (PC) et (AM) , d'où $X = K$
$K = Bar((A,4),(B,2),(C,1)\}$.

On démontre de même que $I = Bar((A,1),(B,4),(C,2)\}$
et $J = Bar((A,2),(B,1),(C,4)\}$

$K = Bar((A,4),(B,2),(C,1)\}$ il résulte alors
$K = Bar((A,8),(B,4),(C,2)\} = Bar((A,7),(A,1),(B,4),(C,2)\}$
$K = Bar((A,7),(I,7)\} = Bar((A,1),(I,1)\}$
K est le milieu du segment $[AI]$
On démontre de même que I est le milieu du segment $[BJ]$ et que J est le milieu du segment $[CK]$.
K est le milieu du segment $[AI]$ donc $AKJ = KIJ$
I est le milieu du segment $[BJ]$ donc $AIJ = AIB = 2IJK$ et $IJC = IBC$
J est le milieu du segment $[CK]$ donc $AKJ = AJC = IJK$ et $IJK = IJC$
$ABC = AIB + AIJ + AJC + IJC + IBC = 2IJK + 2IJK + IJK + IJK + IJK = 7IJK$
d'où $IJK = \frac{1}{7}ABC$