Problème 547-2

Il s'agit de trouver les divisions euclidiennes de diviseur b, de quotient q et de reste r telles que bq + r = (b +q)r.
Cette égalité est équivalente à (b –r)(q – r) = r(r -1)
Il existe k tel que r = b –k avec 0 < k ≤ b.
L'égalité devient k(q –r) = (b – k)(b – k -1).
Pour que q soit entier, (b –k)(b – k -1) doit être multiple de k donc b doit être multiple de k ou congru à 1 modulo k.
On choisit k, puis b multiple non nul de k ou congru à 1 modulo k, on a r = b – k, et
Q = r(r -1)/k + r
K est un entier quelconque strictement positif et on en déduit une infinité de valeurs de b.
Revenons à l'exemple de l'énoncé k = 6, b = 18, multiple de 6, r = 18 – 6 = 12 et
q = 12 X 11/ 6 + 12 = 34
Avec k = 6, on aurait pu prendre b = 19, ainsi r = 13 et q = 39.
On a bien 754 = 19 X 39 +13 = (19 + 39) X 13.
Ce genre de divisions se rencontre très tôt dans la scolarité, ainsi
14 = 3 X 4 + 2 = (3 + 4) X 2, 33 = 6 X 5 +3 = (6 +5) X 3, etc…

On question vient alors à l'esprit : "Quelle est la proportion de divisions "pérrinniennes", par rapport au divisions euclidiennes ?".
Ainsi, pour a, b, q, r inférieurs à un entier n, on cherche la limite quand n tend vers l'infini, du quotient du cardinal de l'ensemble des quadruplets "perrinniens" par le cardinal de l'ensemble des quadruplets euclidiens, ou, mieux encore, on en cherche un développement asymptotique.
La question est (probablement !) trop difficile pour moi, je ne serais pas étonné cependant que la limite soit 1.

Daniel Djament.