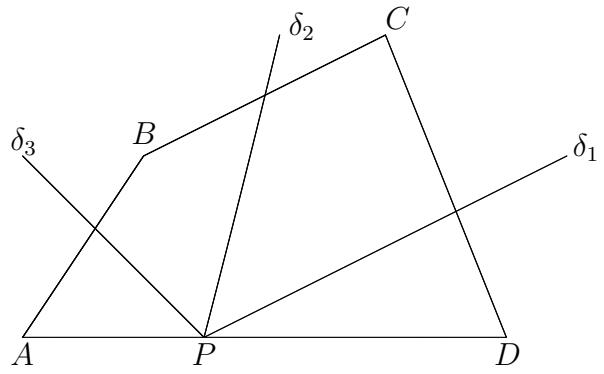
547-3 Partage d'un quadrilatère.

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P un point du segment $[AD]$. On demande, à l'aide de considérations géométriques simples, de construire la droite δ, passant par P, qui découpe le quadrilatère en deux parties de même aire.

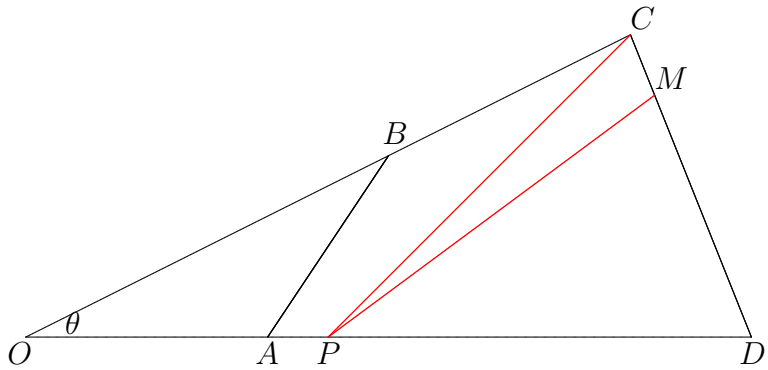


On considère donc un point P de $[AD]$ et des droites $\delta_1, \delta_2, \ldots$, issues de P, qui balayent le demi-plan au dessus de (AD) ; puisque le quadrilatère $ABCD$ est convexe, les points B et C sont d'un même côté par rapport à la droite (AD) et les droites δ_i rencontrent sucessivement les côtés $[DC]$, $[CB]$ et $[BA]$; la surface balayée augmente, et il existe une position de la droite, appelée δ, où cette surface est égale à la moitié, notée s, de l'aire de $ABCD$. Il y a donc 2 cas, selon la position du point P sur $[AD]$.

1. Aire$(PAB) \geq s$ ou aire$(PDC) \geq s$; alors δ rencontre les côtés $[AB]$ ou $[CD]$. Ces deux situations sont analogues ; nous traiteront le cas où δ rencontre $[CD]$ en un point M, et calculerons la longueur de DM, sans avoir obtenu de construction géométrique.

2. Aire$(PAB) < s$ et aire$(PDC) < s$; alors δ rencontre le côté $[BC]$ en un point Q. Dans ce cas, nous avons obtenu une construction géométrique.

Pour étudier ces deux cas, on suppose que les droites AD et BC sont concurrentes, en un point O (les résultats obtenus s'appliquent si $AD \parallel BC$).



On pose $a = OA$, $b = OB$, $c = OC, c > b$, $d = OD, d > a$ et $\theta = \widehat{DOC}$; alors, on a

$$S_1 := \text{aire}(OAB) = \frac{1}{2}ab\sin\theta, \quad S_2 := \text{aire}(OCD) = \frac{1}{2}cd\sin\theta, \text{ et}$$

$$s = \frac{1}{2}\text{aire}(ABCD) = \frac{cd - ab}{4}\sin\theta.$$

1. On suppose donc que $P \in [AD]$ est tel que aire$(PDC) \geq s$; on pose $x = OP$ et la droite δ coupe CD en M (voir figure ci-dessus).
On a alors aire$(PCD) = \frac{1}{2}\big(cd - cx\big)\sin\theta$ et

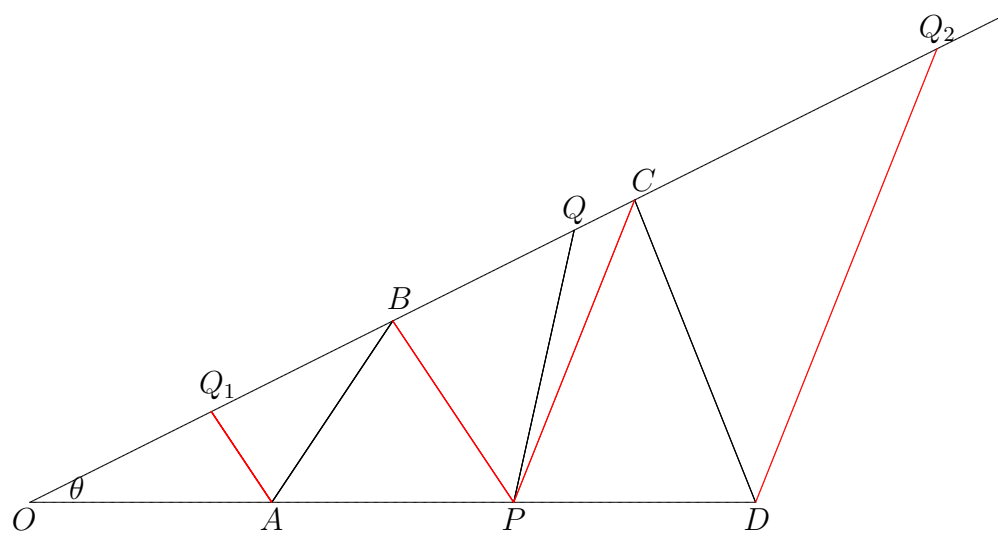
$$\text{aire}(PDC) \geq s \iff (cd - cx) \geq \frac{cd - ab}{2} \iff x \leq \frac{ab + cd}{2c}.$$

On suppose donc que $a \leq x \leq \dfrac{ab + cd}{2c}$ et on calcule DM, en exprimant que aire$(PDM) = s$; on a aire$(PDM) = \dfrac{DM}{DC}$aire$(PDC) = \dfrac{DM}{DC}\,\dfrac{cd - cx}{2}\sin\theta$, et aire$(PDM) = s = \dfrac{cd - ab}{2}\sin\theta$ si et seulement si

$$DM = DC\,\frac{cd - ab}{2(cd - cx)} = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd\cos\theta}\,\frac{cd - ab}{2(cd - cx)}.$$

On a donc exprimé la longueur de DM en fonction des quantités qui définissent le quadrilatère $ABCD$.

2. On suppose maintenant que $P \in [AD]$ est tel que aire$(PAB) < s$ et aire$(PDC) < s$; la droite δ coupe BC en Q et on pose $u = OP$, $v = OQ$.



On déduit de 1. que aire$(PDC) < s$ si et seulement si $u > \dfrac{ab + cd}{2c}$, et de même, on a aire$(PAB) < s$ si et seulement si $u < \dfrac{ab + cd}{2b}$.
On suppose donc que $\dfrac{ab + cd}{2c} < u < \dfrac{ab + cd}{2b}$, et on détermine v, en exprimant que aire$(BAPQ) =$ aire$(PQCD)$.

On pose $S_3 =$ aire(OPQ) et on a $S_3 = \dfrac{1}{2}uv\sin\theta$; on a alors

$$\begin{aligned}\text{aire}(BAPQ) = \text{aire}(PQCD) &\iff S_3 - S_1 = S_2 - S_3\\ &\iff S_3 = \frac{S_1 + S_2}{2}\\ &\iff uv = \frac{1}{2}\Big(ab + cd\Big).\end{aligned}$$

On a donc

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{u} + \frac{cd}{u}\right) =: \frac{1}{2}\Big(v_1 + v_2\Big)$$

et on considère les points Q_1 et Q_2 de la demi-droite OC tels que

$$OQ_1 = v_1 = \frac{ab}{u} \quad \text{et} \quad OQ_2 = v_2 = \frac{cd}{u}\,;$$

on a alors

$$\frac{OQ_1}{OB} = \frac{OA}{OP} \quad \text{et} \quad \frac{OQ_2}{OC} = \frac{OD}{OP}.$$

On en déduit que $AQ_1 \parallel PB$ et $AQ_2 \parallel PC$, d'où la construction, où le point O et l'angle θ n'interviennent plus et qui est donc valable si AD et BC sont parallèles :

- La droite parallèle à PB et passant par A coupe la droite (BC) en Q_1 ;
- la droite parallèle à PC et passant par D coupe la droite (BC) en Q_2 ;
- le point Q est le milieu de Q_1Q_2.