547-4 Urne et jetons.

Dans une urne, on a placé 20 jetons d'aspect identique ; 10 blancs numérotés de 1 à 10 et 10 dorés numérotés également de 1 à 10. Deux jetons sont dits complémentaires s'ils sont de couleur différente et portent des numéros consécutifs. On demande de trouver combien, au minimum, on doit prélever de jetons dans l'urne pour avoir au moins 9 chances sur dix de tirer deux numéros complémentaires.

D'une manière un peu différente, on numérote les jetons de 1 à 20 ; les jetons numérotés de 1 à 10 sont blancs, ceux numérotés de 11 à 20 sont dorés. Il y a 18 couples de jetons complémentaires qui sont :

$$\begin{array}{ccccccccc} (1,12) & (2,11) & (2,13) & (3,12) & (3,14) & (4,13) & (4,15) & (5,14) & (5,16) \\ (6,15) & (6,17) & (7,16) & (7,18) & (8,17) & (8,19) & (9,18) & (9,20) & (10,19). \end{array}$$

On prélève n jetons dans l'urne ; il y a $\binom{20}{n}$ manières de le faire. On détermine le nombre x_n de tirages ne contenant pas de numéro complémentaire ; alors la probabilité pour que le tirage contienne au moins deux numéros complémentaires est égale à

$$p_n = \frac{\binom{20}{n} - x_n}{\binom{20}{n}} = 1 - \frac{x_n}{\binom{20}{n}}.$$

Si $n = 7$, alors $\binom{20}{7} = 77520$; nous allons montrer que $x_7 < 7752$, d'où $p_7 > 0.9$;

si $n = 6$, alors $\binom{20}{6} = 38760$; nous allons montrer que $x_6 > 3876$, d'où $p_6 < 0.9$.
Cela entraînera que l'on doit prélever au moins 7 jetons.

I) On suppose que l'on effectue un tirage A de 7 jetons ; nous allons donc montrer que $x_7 < 7752$, en considérant 8 cas, selon le nombre k de jetons de numéro ≤ 10 que contient le tirage A.
On note $A = \{a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_{7-k}\}$, $1 \leq a_i \leq 10$, $11 \leq b_j \leq 20$. Pour tout $k = 0, \ldots, 7$, on désigne par N_k le nombre de tirages ne contenant pas de numéros complémentaires.

(o) $k = 0$; alors on a $A = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$. De manière évidente, il n'y a pas de couple de numéros complémentaires et $N_0 = \binom{10}{7} = 120$.

(i) $k = 1$; alors on a $A = \{a_1; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$, et il y a $\binom{10}{1} = 10$ manières de choisir a_1. Afin que A ne contienne pas de numéros complémentaires, on doit avoir
– si $a_1 = 1$, alors $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \neq 12$;
– si $a_1 = 10$, alors $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \neq 19$;
– si $a_1 \neq 1, 10$, alors $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \neq$ chaque fois de 2 valeurs ;
(par exemple, si $a_1 = 2$, on doit avoir $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \neq 11, 13$, et il reste 6 valeurs des b_i à choisir parmi 8).

On a donc $N_1 = 2\binom{9}{6} + (10-2)\binom{8}{6} = 2 \times 84 + 8 \times 28 = 392$.

(ii) $k = 2$; alors on a $A = \{a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, et il y a $\binom{10}{2} = 45$ manières de choisir a_1 et a_2. On doit avoir

– si $a_1 = 1$ et $a_2 = 10$, alors $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \neq 12, 19$;

– si $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$, alors $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \neq 12, 14$;

– si $a_1 = 10$ et $a_2 = 8$, alors $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \neq 19, 17$;

– dans tous les autres cas, il y a 3 ou 4 valeurs de b_j interdites, ce qui donne, respectivement, $\binom{7}{5} = 21$ ou $\binom{6}{5} = 6$ solutions.

On a donc $N_2 \leq 3\binom{8}{5} + (45-3)\binom{7}{5} = 3 \times 56 + 42 \times 21 = 1050$.

(iii) $k = 3$; alors on a $A = \{a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3, b_4\}$, et il y a $\binom{10}{3} = 120$ manières de choisir a_1, a_2 et a_3. On doit avoir

– si $a_1 = 1$, $a_2 = 10$ et $a_3 = 3$, alors $b_1, b_2, b_3, b_4 \neq 12, 19, 14$;

– si $a_1 = 1$, $a_2 = 10$ et $a_3 = 8$, alors $b_1, b_2, b_3, b_4 \neq 12, 19, 17$;

– si $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ et $a_3 = 5$, alors $b_1, b_2, b_3, b_4 \neq 12, 14, 16$;

– si $a_1 = 10$, $a_2 = 8$ et $a_3 = 6$, alors $b_1, b_2, b_3, b_4 \neq 19, 17, 15$;

– dans tous les autres cas, il y a 4, 5 ou 6 valeurs de b_j interdites, ce qui donne, respectivement, $\binom{6}{4} = 15$, $\binom{5}{4} = 5$ ou $\binom{4}{4} = 1$ solutions.

On a donc $N_3 \leq 4\binom{7}{4} + (120-4)\binom{6}{4} = 4 \times 35 + 116 \times 15 = 2030$.

(iv) $k = 4, 5, 6, 7$. Il y a exactement les mêmes propriétés pour les a_i et les b_j ; on raisonne à partir du nombre de b_j qui est égal sucessivement à 3,2,1,0, et obtient le même résultat.

(v) On donc montré que si on prélève 7 jetons, le nombre x_7 de tirages ne contenant pas de numéros complémentaires vérifie

$$x_7 < 2\Big(120 + 392 + 1050 + 2030\Big) = 2 \times 3592 = 7184.$$

Comme $7184 < 7752$, cela montre que si on prélève 7 jetons, on a au moins 9 chances sur dix de tirer deux numéros complémentaires. Il reste à montrer que cela n'est pas possible avec 6 jetons.

II) On suppose donc que l'on effectue un tirage de 6 jetons ; on procède de la même manière qu'au I), pour montrer que $x_6 > 3876$. Pour tout $k = 0, \ldots, 6$, on désigne par

M_k le nombre de tirages ne contenant pas de numéros complémentaires, et on obtient

$$\begin{aligned}
M_0 &= \binom{10}{6} = 210 \\
M_1 &= 2\binom{9}{5} + \big(10-2\big)\binom{8}{5} = 700 \\
M_2 &> 3\binom{8}{4} + \big(45-3\big)\min\left[\binom{7}{4}, \binom{6}{4}\right] = 840 \\
M_3 &> 4\binom{7}{3} + \big(120-4\big)\min\left[\binom{6}{3}, \binom{5}{3}, \binom{4}{3}\right] = 604
\end{aligned}$$

On en déduit

$$x_6 > 2\Big(210 + 700 + 840\Big) + 604 = 4104.$$

Comme $4104 > 3876$, cela montre qu'avec 6 jetons, on a moins 9 chances sur dix de tirer deux numéros complémentaires.

On a donc montré que l'on doit prélever au moins **7** jetons.

Remarque. Avec un programme sur ordinateur, on obtient

$$p_6 = \frac{4352}{38760} = 0.8520 \text{ et } p_7 = \frac{5776}{77520} = 0.9438\cdot$$

Marie-Nicole Gras