PROBLEME 547-3 . PARTAGE D'UN QUADRILATERE

1, lieu de l'intersection de deux droites variables (figure 1).

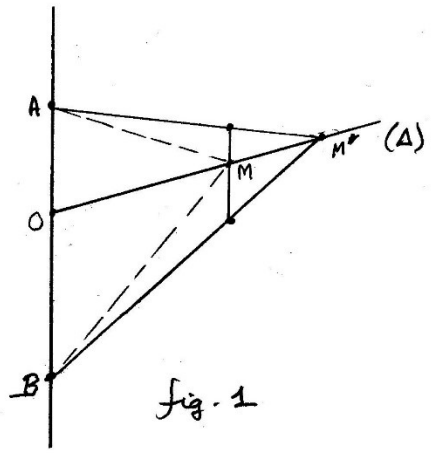


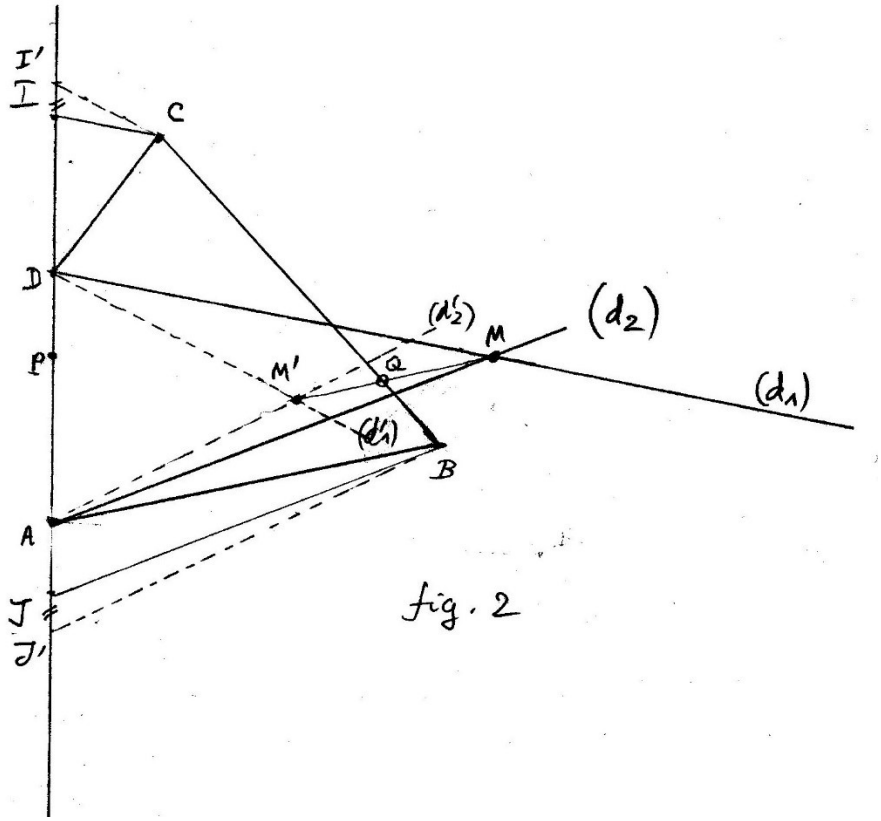
fig. 1

Soient trois points alignés, O,A,B sur l'axe vertical d'un repère. Par O on fait passer une deuxième droite (Δ) sur laquelle un point M se déplace. On considère deux positions de ce point, M et M'. Sur la parallèle à AB passant par M, les segments AM' et BM' découpent deux segments homothétiques de OA et OB.

Lorsque M se déplace sur (Δ), il en découle que les variations des pentes des droites AM et BM se produisent dans un rapport constant, égal à OA/OB

Inversement, plaçons un point M hors de (AB). Si l'on fait tourner les droites AM et BM de manière à ce que les variations de leurs pentes soient dans un rapport constant, alors le point d'intersection des droites AM et BM reste sur la droite (Δ) qui rencontre (AB) au point O tel que OA/OB est égal au rapport constant.

2, application à une figure plus complexe (figure 2).



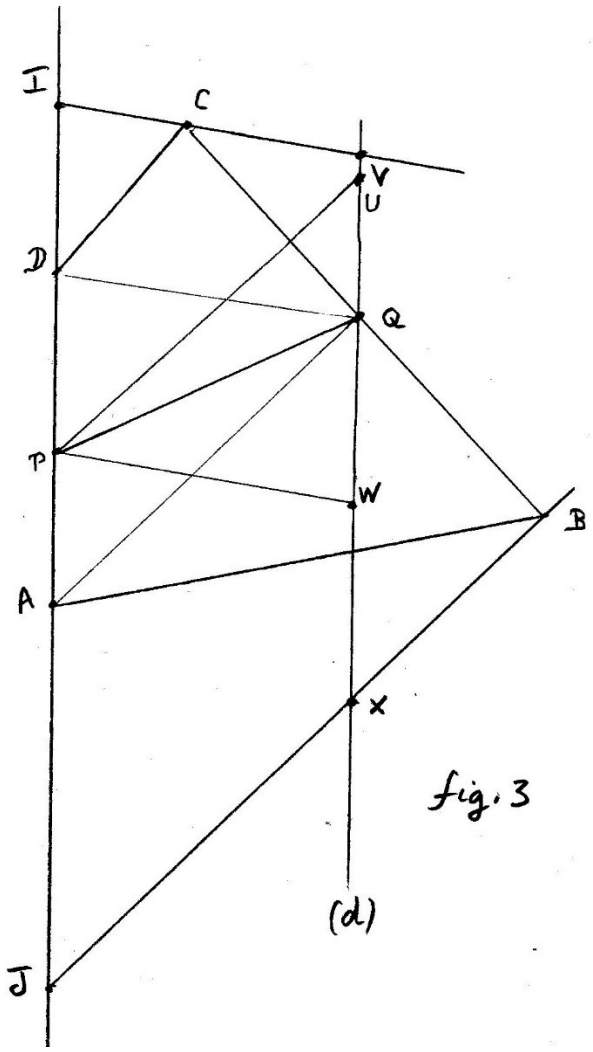
Soit ABCD un quadrilatère convexe, et P un point du segment AD. On considère deux points I et J, sur la droite AD, et symétriques par rapport à P.

On trace alors (d_1) la parallèle à CI passant par D et (d_2) la parallèle à BJ passant par A.

Lorsque I et J se déplacent tout en restant symétriques par rapport à P, l'intersection de (d1) et de (d2) décrit une droite.

En effet, il s'agit d'une application du résultat précédent ; les pentes des droites (d1) et (d2) varient dans un rapport constant, puisque ces pentes sont respectivement celles de CI et BJ, et ces dernières varient dans un rapport constant puisque I et J varient en restant équidistants de P ; les pentes de CI et BJ varient inversement proportionnellement au rapport des distances de C et B à la droite AD, qui est constant.

3, comparaison d'aires de quadrilatères (figure 3)



Soit ABCD un quadrilatère convexe, P un point du côté AD, et une droite passant par P, coupant le côté BC en Q.

On construit la parallèle à DQ passant par C, la parallèle à AQ passant par B et la parallèle (d) à AD passant par Q. Cela définit les points d'intersection I,J,X,V sur la figure.

Enfin les parallèles à AQ et DQ passant par P coupent respectivement (d) en U et W (voir figure).

L'aire (PQCD) est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme (PWVI) : on le voit en décomposant (PQCD) en les deux triangles (PQD) et (DQC).

L'aire (PABQ) est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme (PJXU). Ceci est un peu plus compliqué à voir ; le triangle (PQU) est symétrique de (PAQ) donc l'aire de (PAQ) vaut la moitié de celle du parallélogramme (AQUP). Le triangle (ABQ) à même aire que (AXQ), et donc la moitié de l'aire de (AJXQ).

Pour que la droite (PQ) coupe (ABCD) en deux quadrilatères d'aires égales, il faut et il suffit donc que les deux parallélogrammes (PWVI) et (PJXU) soient d'aires égales. Avec leur positionnement entre les deux droites parallèles (AD) et (d), ceci équivaut au fait que P soit le milieu de (IJ).

4, construction de la droite solution (figure 2)

On construit arbitrairement deux couples de points I,J et I',J' symétriques par rapport à P. Complétant ainsi la figure 2, on obtient deux positions du point d'intersection des droites (d1) et (d2). Ce point décrivant une droite, on la trace, et on appelle Q son intersection avec le côté (BC) du quadrilatère.

Si l'on trace alors DQ, AQ, et leurs parallèles respectives en C et D qui rencontrent AD en I_0 et J_0 , d'après (2), I_0 et J_0 sont symétriques par rapport à P et, d'après (3), (PQ) découpe (ABCD) en deux quadrilatères d'aire égale.