547-4 Urne et jetons

1) Un dénombrement auxiliaire

Soit E l'ensemble des entiers naturels compris au sens large entre 1 et n.

On cherche à dénombrer l'ensemble A des parties à k éléments de E ne contenant aucune paire d'entiers consécutifs.

Pour un éléments F de A, on écrit la suite des éléments de F dans l'ordre croissant.
Puis l'on retranche 1 au deuxième terme de la suite, 2 au troisième terme de la suite, 3 au quatrième terme de la suite, …, $k-1$ au $n^{\text{ième}}$ terme de la suite.

On réalise ainsi une bijection entre l'ensemble A et l'ensemble des parties à k éléments de $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-k+1\}$.

Donc : $\text{Card}(A) = C_{n-k+1}^{k}$ (avec la convention $C_{n-k+1}^{k} = 0$ si $2k > n+1$)

2) Probabilité avec n tirages dans l'urne de l'énoncé

On note Bk le jeton blanc portant le numéro k et Dk le jeton doré portant le numéro k.

On range les jetons en deux suites d'éléments consécutifs :

S=(B1, D2, B3, D4, B5, D6, B7, D8, B9, D10)
T=(D1, B2, D3, B4, D5, B6, D7, B8, D9, B10)

Soit U l'ensemble des 20 jetons de l'urne.

On cherche à dénombrer l'ensemble A des parties à n éléments de U ne contenant aucune paire de jetons complémentaires.

Une telle partie contient k termes de la suite S, sans paire de termes consécutifs et $n-k$ termes de la suite T, sans paire de termes consécutifs.

D'après 1) : $\text{Card}(A) = \sum_{k=0}^{n} C_{11-k}^{k} \cdot C_{11-n+k}^{n-k}$

En prélevant n jetons, la probabilité p_n de n'obtenir aucune paire de jetons complémentaires est donc :

$$p_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{11-k}^{k} \cdot C_{11-n+k}^{n-k}}{C_{20}^{n}}$$

3) Conclusion

On cherche la valeur minimale de n pour que : $p_n < \frac{1}{10}$

La formule donne : $\begin{cases} p_6 = \frac{38}{255} > \frac{1}{10} \\ p_7 = \frac{16}{285} < \frac{1}{10} \end{cases}$

La valeur minimale de n est donc 7.