Merci à Daniel Perrin pour cet exercice sympathique.

L'arithmétique est la reine des mathématiques !

547–2 Fatale erreur

Dans la classe de cours moyen, le petit Valentin, toujours contestataire, proteste auprès de sa maîtresse :

« Mais, Madame, je ne vois pas pourquoi vous m'avez mis zéro à ma division, j'avais tout bon ! »

La maîtresse a beaucoup de mal à lui expliquer que diviser 624 par 18 c'est écrire $624 = 18 \times 34 + 12$ et non pas $624 = (18 + 34) \times 12$, même si les résultats sont identiques.

Montrer qu'on peut fabriquer une infinité d'exemples de cette situation, c'est-à-dire d'entiers b, q, r avec $0 \leq r < b$, vérifiant $bq + r = (b + q)\, r$.

Solution :

Nous cherchons les solutions entières b, q, et r, avec $0 \leq r < b$, de l'équation diophantienne :

$$bq + r = (b + q)\, r.$$

- S'il s'agit uniquement de déterminer une infinité de solutions, on peut commencer par donner une infinité d'exemples relativement triviaux.

  Supposons pour cela que $q = r$.

  On a alors :

$$\begin{aligned} bq + q = (b + q)\, q &\Leftrightarrow bq + q = bq + q^2 \\ &\Leftrightarrow q\,(q - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow q = 0 \text{ ou } q = 1. \end{aligned}$$

  * Pour $r = q = 0$, et tout $b \in \mathbb{N}^*$, on obtient une solution car alors $bq + r = (b + q)\, r = 0$ et $0 \leq r < b$.
  * Pour $r = q = 1$, et tout $b \geq 2$ entier, on obtient une solution car alors $bq + r = (b + q)\, r = b + 1$ et $0 \leq r < b$.

- Pour $q \neq r$, on souhaiterait maintenant trouver des solutions plus élégantes. Nous définissons une solution <u>élégante</u> comme étant une solution vérifiant $q \neq r$.

  — Recherchons d'abord les éventuelles solutions élégantes pour $r = 0$ puis $r = 1$.

    * Pour $r = 0$, on a $bq = 0$, ce qui est impossible car $q \neq r$ donc $q \neq 0$, et $b > r$ donc $b > 0$.

      Il n'existe aucune solution élégante pour $r = 0$.
    * Pour $r = 1$, on a $bq + 1 = b + q \Leftrightarrow 1 - q - b\,(1 - q) = 0 \Leftrightarrow (1 - q)\,(1 - b) = 0$. C'est encore impossible car $q \neq 1$ et $b > 1$.

      Il n'existe aucune solution élégante pour $r = 1$.

— Ne nous décourageons pas ! Pour chaque $r \geq 2$ fixé, on verra que l'on obtient des solutions élégantes ! Avant d'étudier le cas général, commençons par étudier le cas $\boxed{r = 12}$, en nous inspirant de la division euclidienne qui a posé problème au petit Valentin. La méthode de résolution que nous proposons dans ce cas particulier sera ensuite adaptée et appliquée de manière similaire à tout autre $r \geq 2$, ce que nous détaillerons dans un second temps.

Soient b et q des entiers tels que :

$$\begin{aligned} bq + 12 = 12\,(b+q) &\Leftrightarrow bq + 12 = 12b + 12q \\ &\Leftrightarrow 12\,(1-q) = b\,(12-q)\,. \end{aligned}$$

Puisque $12 - q$ divise $12\,(1-q)$ et évidemment $12 - q$, par combinaison linéaire $12 - q$ divise $12\,(12-q) - (12 - 12q) = 144 - 12q - 12 + 12q = 132$.

Les diviseurs positifs de $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ sont : $1; 2; 3; 4; 6; 11; 12; 22; 33; 44; 66$ et 132.

On a donc nécessairement :

$12 - q \in \{-132; -66; -44; -33; -22; -12; -11; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 11; 12; 22; 33; 44; 66; 132\}$,

Soit :

$-q \in \{-144; -78; -56; -45; -34; -24; -23; -18; -16; -15; -14; -13; -11; -10; -9; -8; -6; -1; 0; 10; 21; 32; 54; 120\}$,

Ou encore :

$q \in \{-120; -54; -32; -21; -10; 0; 1; 6; 8; 9; 10; 11; 13; 14; 15; 16; 18; 23; 24; 34; 45; 56; 78; 144\}$.

À chacune de ces valeurs de q est associé $b = \dfrac{12\,(1-q)}{12-q}$ (avec $q \neq 12$ car on suppose $q \neq r$). Cependant, il faut que b soit strictement supérieur à $r = 12$, ce qui impose aussi :

$$\begin{aligned} \frac{12\,(1-q)}{12-q} > 12 &\Leftrightarrow \frac{12\,(1-q)}{12-q} - 12 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{12 - 12q - 144 + 12q}{12-q} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-132}{12-q} > 0 \\ &\Leftrightarrow 12 - q < 0 \\ &\Leftrightarrow q > 12. \end{aligned}$$

(À ce stade, on se rend compte que b et q jouent des rôles parfaitement symétriques, car on recherche les solutions $b > 12$ et $q > 12$ de l'équation $bq + r = (b+q)\,r$ symétrique par rapport à b et q)

En conclusion, dans le cas $r = 12$, il faut nécessairement que :

$$q \in \{13; 14; 15; 16; 18; 23; 24; 34; 45; 56; 78; 144\}\,.$$

On obtient de cette manière toutes les solutions élégantes de ce cas particulier, qui sont données par :

* $q = 13$, $b = \dfrac{12\,(1-13)}{12-13} = 144$, et $144 \times 13 + 12 = 1884 = (144+13) \times 12$;

* $q = 14$, $b = 78$, et $78 \times 14 + 12 = 1104 = (78 + 14) \times 12$;
* $q = 15$, $b = 56$, et $56 \times 15 + 12 = 852 = (56 + 15) \times 12$;
* $q = 16$, $b = 45$, et $45 \times 16 + 12 = 732 = (45 + 16) \times 12$;
* $q = 18$, $b = 34$, et $34 \times 18 + 12 = 624 = (34 + 18) \times 12$;
* $q = 23$, $b = 24$, et $24 \times 23 + 12 = 564 = (24 + 23) \times 12$;

Ainsi que les solutions « symétriques » obtenues en permutant les valeurs de b et q.

— On généralise facilement la méthode à n'importe quel $r \geq 2$ entier fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} bq + r = (b+q)\,r &\Leftrightarrow bq + r = br + qr \\ &\Leftrightarrow r\,(1-q) = b\,(r-q)\,. \end{aligned}$$

Donc $r - q$ divise $r\,(1-q)$ et $r - q$.

Par combinaison linéaire, $r - q$ divise $r\,(r-q) - (r - rq) = r^2 - r = r\,(r-1)$.

Puisque $r \geq 2$, on a $r - 1 \geq 1$ donc $r\,(r-1) \geq 2$. De plus r et $r - 1$ sont premiers entre eux (d'après Bézout $r - (r-1) = 1$), donc $r\,(r-1)$ admet un nombre de diviseurs positifs égal à $d\,(r\,(r-1)) = d\,(r)\,d\,(r-1) \geq 2$ (où d est la fonction arithmétique nombre de diviseurs).

Il faut que b soit strictement supérieur à r, donc :

$$\begin{aligned} \frac{r\,(1-q)}{r-q} > r &\Leftrightarrow \frac{r - rq - r\,(r-q)}{r-q} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{r - r^2}{r-q} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{r\,(1-r)}{r-q} > 0. \end{aligned}$$

On a $r\,(1-r) \leq -2 < 0$, d'où nécessairement $r - q < 0$, soit $q > r$. Les entiers q et b jouent des rôles parfaitement symétriques.

Soit D_r l'ensemble des diviseurs entiers relatifs de $r\,(r-1)$. On recherche les entiers $q > r$ tels que $r - q \in D_r$, soit $q \in \{r - d \mid d \in D_r\}$, et puisque $\{-d \mid d \in D_r\} = D_r$, on a $q \in (r + D_r)$ (où $(r + D_r) = \{r + d \mid d \in D_r\}$).

Pour déterminer toutes les solutions élégantes, il faut déterminer tous les éléments strictement supérieurs à r de $(r + D_r)$. Il y en a autant que d'éléments strictement positifs dans D_r, c'est-à-dire $d\,(r)\,d\,(r-1)$. Difficile d'en dire beaucoup plus, car la fonction d est très irrégulière, mais en tout cas $d\,(r)\,d\,(r-1)$ est pair (car pour $r \geq 2$, r et $r - 1$ ne peuvent pas être simultanément des carrés parfaits) et supérieur ou égal à 2.

Même si l'on n'est pas capable de donner une formule explicite donnant l'ensemble des solutions élégantes pour $r \geq 2$ quelconque fixé, on peut tout de même affirmer que $r + 1$ et r^2 appartiennent à $(r + D_r)$, car 1 et $r^2 - r$ divisent toujours $r^2 - r$. Donc pour tout $r \geq 2$ on obtient déjà :

* $q = r + 1$ et $b = r^2$, d'où $bq + r = \boxed{r^3 + r^2 + r} = (b+q)\,r$.
* La solution symétrique $q = r^2$ et $b = r + 1$, d'où $bq + r = \boxed{r^3 + r^2 + r} = (b+q)\,r$.

De même, 2 divise r ou $r-1$, donc 2 divise $r(r-1)$, et donc $r+2 \in (r+D_r)$, ce qui donne deux nouvelles solutions élégantes lorsque $r \geq 3$ (lorsque $r=2$, ces deux solutions sont confondues avec celles que l'on vient d'expliciter) :

* $q = r+2$ et $b = \dfrac{r(1-q)}{r-q} = \dfrac{r(r+1)}{2}$, d'où $bq + r = \boxed{\dfrac{r(r^2+3r+4)}{2}} = (b+q)\,r$.
* La solution symétrique $q = \dfrac{r(r+1)}{2}$ et $b = r+2$, d'où $bq + r = \boxed{\dfrac{r(r^2+3r+4)}{2}} = (b+q)\,r$.

Pour éviter toute contestation de la part de Valentin, la maîtresse devra entre autres éviter de faire diviser des entiers de la forme r^3+r^2+r par r^2 ou $r+1$, avec $r \geq 2$ entier, ou encore faire diviser des entiers de la forme $\dfrac{r(r^2+3r+4)}{2}$ par $r+2$ ou $\dfrac{r(r+1)}{2}$, avec $r \geq 2$ entier.