Le bulletin de l’APMEP - N° 550

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l’université

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2023

Grandeurs

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

APMEP

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Voyage mathématique en Égypte ancienne

Partir à la découverte des fractions égyptiennes et de problèmes issus de papyrus de l'Égypte ancienne… Françoise Marchesseau nous conte son périple avec des élèves de Seconde.

Françoise Marchesseau

Ce « voyage » a eu lieu pendant la semaine des mathématiques 2023 qui était aussi la semaine internationale dans mon lycée. J'ai choisi « d'emmener » mes élèves en Égypte et de les faire travailler, entre autres, sur un des problèmes du papyrus de Moscou [1].

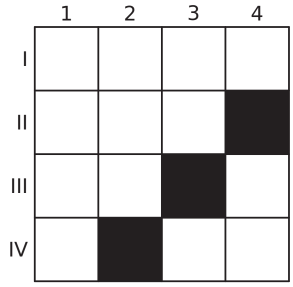
Recherches et découverte des décompositions fractionnaires du *Papyrus Rhind*

Pour commencer notre voyage, j'ai proposé aux élèves de faire des recherches sur les mathématiques égyptiennes en commençant par le *Papyrus Rhind*[1]. Ce papyrus est le plus important document mathématique qui nous soit parvenu de l'Égypte ancienne. Il contient 84 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage.

Par demi-groupe, les élèves ont pu travailler grâce à de nombreux livres sur la numération égyptienne mis à disposition par mon collègue professeur documentaliste. Ils avaient tous un ordinateur pour compléter ou vérifier la signification des hiéroglyphes à partir de sites de leur choix. Ils devaient tous compléter la grille suivante avec des hiéroglyphes (figure 1).

1. Ce papyrus se présente en plusieurs parties conservées au British Museum et au Brooklyn Museum. Les principales ont été achetées en 1858 par Alexander Henry Rhind d'où l'appellation *Papyrus Rhind* pour l'ensemble du document. Il date de 1650 avant notre ère. Il est une copie effectuée par le scribe Ahmès d'un ou plusieurs documents vieux de deux siècles environ.

Comptez comme les anciens Égyptiens



(la réponse se trouve page 65)

HORIZONTALEMENT	VERTICALEMENT
I : Le tiers de 3 333.	I : Le quadruple de 325.
II : Le double de 51.	II : Le triple de 34.
III : Juste après une centaine. C'est mieux que zéro.	III : Le quart de 44. Un siècle.
IV : Le quart de 400. Le dixième de 1 010.	IV : La moitié de 2. Une paire.

Figure 1. *Page 61 du Livre-jeu des hiéroglyphes [2].*

À la suite de ce travail, que les élèves ont apprécié, nous avons fait un bilan. Ils ont retenu que les Égyptiens utilisaient :

- un système de numération décimal, additif et non positionnel ;
- les symboles suivants.

Figure 2. *Symboles égyptiens* ▶.

Puis, ils ont fait des recherches sur les fractions égyptiennes et ont découvert que :

- les Égyptiens utilisaient des fractions nommées inverses ou quantièmes, de numérateur égal à un et de dénominateur un entier strictement positif, ainsi que la fraction $\frac{2}{3}$;
- ils représentaient les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ par des symboles spéciaux (figure 3) ;
- le signe de la bouche (figure 3) pourrait signifier « part », même si on ne sait pas exactement pourquoi les scribes ont utilisé ce signe (peut-être comme référence à des partages alimentaires).

Figure 3. *Fractions égyptiennes.*

Ensuite, avec l'aide de l'affiche « Voyage en Mathématique » [2] ▶, les élèves ont étudié ce que l'on nomme développement en fractions égyptiennes.

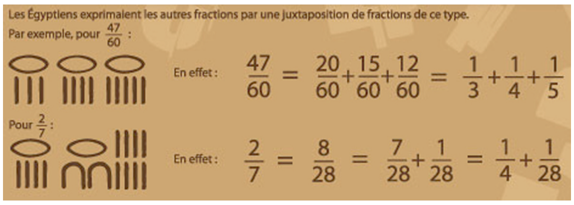


Figure 4. *Extrait de l'affiche « Voyage en Mathématique ».*

Ils ont remarqué que ce serait plus simple d'écrire : $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ plutôt que le développement avec $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{28}$ (figure 3). Je leur ai alors expliqué que, d'après certains chercheurs qui ont étudié ces questions de développement, l'auteur du *Papyrus Rhind* semblait éprouver le besoin de donner parfois ce que nous pouvons appeler la meilleure approximation égyptienne, ce qui est le cas ici avec $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.

L'auteur décompose des fractions de type $\frac{2}{n}$ (où n est un nombre premier). On peut, par exemple, trouver dans les écrits, après transcription et traduction :

> Les expressions de 2 à partir de 11 sont : $\frac{2}{11} = \frac{1}{6}+\frac{1}{66}$
> et $\frac{2}{11} = \left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}$.

Il précise aussi que nous pouvons décomposer en quantièmes *distincts*.

2. Ce projet est articulé autour d'une exposition interactive, des vidéos sur des mathématiciens comme Âhmès, Pythagore, Liu Hui, Hypathie, Âryabhata, Al-Khwârizmî, Fibonacci, Fermat, Euler, Kovalvskaya, Noether, Poincaré, Turing et d'une application numérique ▶.

En effet, en considérant que le nombre n est impair, on pose $n = 2k+1$ où le nombre k est un entier naturel non nul. Nous avons $\frac{1}{k+1} = \frac{2}{2k+2}$. Or $\frac{2}{2k+2} < \frac{2}{2k+1} < \frac{2}{2k}$.

Donc $\frac{1}{k+1} < \frac{2}{n} < \frac{1}{k}$. Ainsi nous avons encadré la fraction $\frac{2}{n}$ entre deux quantièmes.

Or $\frac{2}{2k+1} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$. Nous obtenons immédiatement la décomposition suivante en deux quantièmes :

$$\frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}.$$

Pour tout entier naturel k non nul, on dit que cette décomposition est primaire, ce qui se note **DP**. L'auteur du *Papyrus Rhind* donne des résultats auxquels correspond l'égalité **DP** seulement pour les nombres premiers 5, 7, 11 et 23.

Si, dans **DP**, on pose $k = 3$, on obtient $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ et pour $k = 5$, on retrouve : $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$.

Après ce travail sur les décompositions, les élèves ont effectué une visite interactive de l'exposition « Voyage en Mathématique » sur le site Fermat Science. L'exposé de Michel Guillemot au sujet d'Âhmès[3], copiste du *Papyrus Rhind*, leur a appris que les calculs présentés dans ces écrits conduisent à des résultats qui, aujourd'hui, peuvent nous surprendre. Il cite que *dans les textes économiques relatifs aux salaires du temple d'EL-Lahoun, un ouvrier peut recevoir* $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{180}$ *d'une certaine capacité de bière*. Les élèves ont retrouvé ici la fraction $\frac{2}{3}$ et les quantièmes.

Je leur ai alors proposé de réduire cette somme, sans calculatrice.

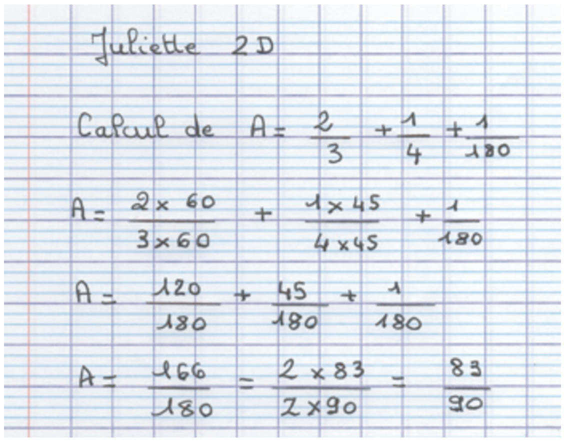


Figure 5. *Calculs de Juliette.*

Le papyrus de Moscou

Ce papyrus a été découvert en 1893 et date d'environ 1850 av. J.-C. Il est probablement l'un des plus anciens papyrus mathématiques égyptiens qui nous soit parvenu. Il fait actuellement partie de la collection du musée des Beaux-Arts de Moscou.

En demi-groupe, nous avons abordé le **problème M6** de ce papyrus (figures 6 et 7). Nous nous sommes appuyés sur des extraits du document de Daniel Austin et Michel Guillemot « Quatre problèmes de dimensions » [1]. L'étude de ce document a été réalisée en classe et complétée à la maison.

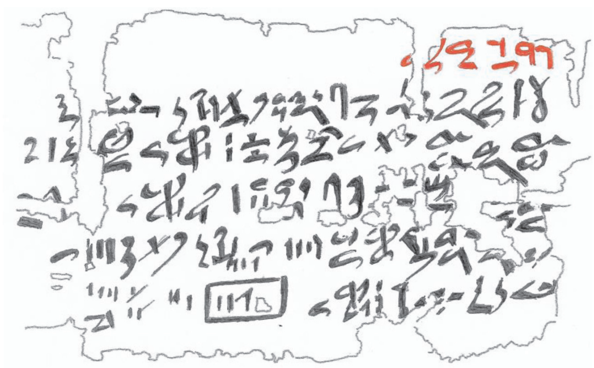


Figure 6. *Extrait du papyrus M6, transcription hiératique [1].*

3. Video « Âhmès, un scribe égyptien » réalisée par Michel Guillemot.

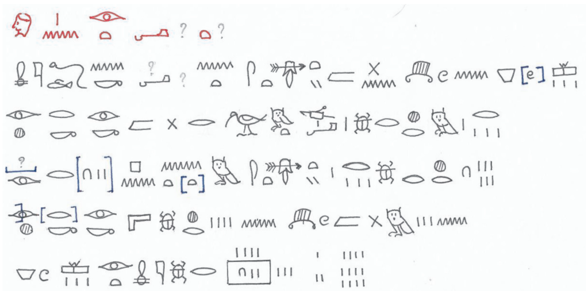


Figure 7. *Extrait du papyrus M6, transcription hiéroglyphique libre [1].*

Premiers déchiffrages

J'ai proposé aux élèves de chercher, dans la transcription proposée (figure 7), les nombres entiers et les fractions en utilisant les documents sur la numération égyptienne créés lors de la séance au CDI.

Je leur ai précisé les éléments suivants nécessaires à leur compréhension pour la suite du voyage :

- il n'existe pas d'espace chez les Égyptiens, ni de ponctuation. Cela signifie que tous les mots sont collés bout à bout et donc qu'il faut commencer à être à l'aise avec la langue égyptienne pour séparer avec certitude les mots les uns des autres ;
- le sens de la lecture des hiéroglyphes n'est pas forcément de gauche à droite, on peut aussi lire de droite à gauche [4] ;
- la suite de symboles à la ligne 2 de la figure 7 signifie « aire d'un rectangle ».

Figure 8. *Aire d'un rectangle (ici lecture de gauche à droite).*

Une correction et des précisions ont été apportées lors d'une mise en commun en classe entière.

À la ligne 3, il faut lire $1\frac{1}{3}$ et non pas $\frac{1}{4}$. Aux lignes 5 et 6, la spirale n'est pas le nombre 100 de la numération égyptienne mais le signe phonétique que les égyptologues traduisent par « ou ». Ceci permet de faire voir que la lecture des signes n'est pas univoque.

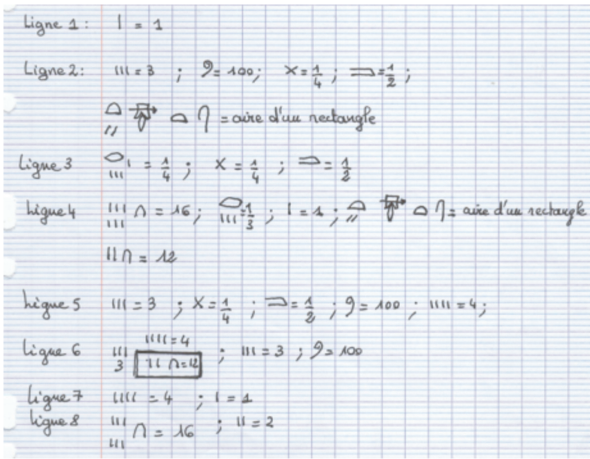


Figure 9. *Écrit de Manon.*

L'étude du problème M6

Après ces premiers déchiffrages, on a abordé le texte du **problème M6** [1].

Ce problème écrit est traduit par :

Problème M6

« Un enclos rectangulaire d'une superficie de 12 ; la largeur est $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ de la longueur. »

Daniel Austin et Michel Guillemot expliquent qu'avec cette traduction nous devons retenir que le scribe énonce multiplicativement la relation entre les dimensions, ce qui pourrait s'énoncer aujourd'hui par : « *Trouver les dimensions d'un rectangle dont on connait l'aire (12) et dont le rapport de la largeur sur la longueur est* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ».

D'un point de vue arithmétique, nous devons donc chercher deux nombres connaissant leur produit et leur rapport.

Si nous notons L et ℓ les mesures respectives de la longueur et de la largeur du rectangle relativement à une même unité de longueur, cela revient à écrire :

$$\ell = L \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right).$$

4. Extrait de .

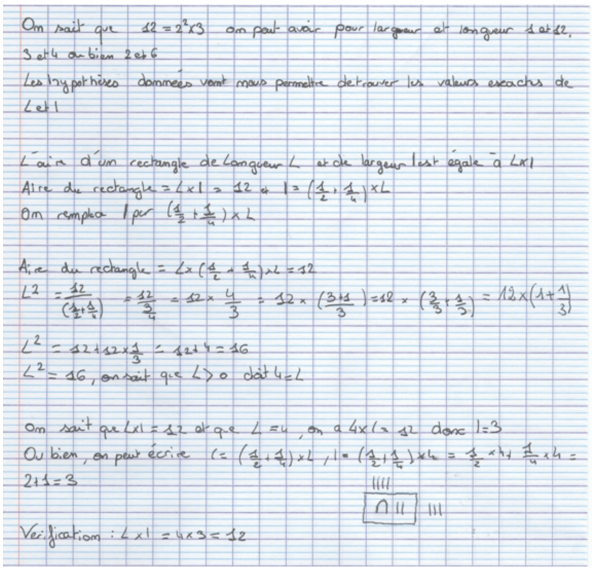
Certains élèves ont eu des difficultés pour comprendre l'énoncé, en particulier pour l'écriture de la somme des deux fractions sans le symbole d'addition entre elles. J'ai regretté de ne pas avoir donné un travail préparatoire sur cette question.

Nous avons convenu de traduire le problème ainsi :

> Un local rectangulaire a une aire de 12 unités^2. Les dimensions ℓ et L sont telles que $\ell = L \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ où ℓ est la largeur et L la longueur du rectangle. Proposer une démonstration pour trouver les valeurs exactes de la largeur et de la longueur du rectangle.

Ce second énoncé a été compris par tous.

Voici la proposition de Noa que nous avons recopiée à la fin de la mise en commun en classe.


Om sait que $12 = 2^2 \times 3$ om peut avoir pour largeur et longueur 1 et 12, 3 et 4 ou bien 2 et 6
Les hypothèses dommées vomt mous permettre de trouver les valeurs exactes de L et l

L'aire d'um rectangle de Longueur L et de largeur l est égale à $L \times l$
Aire du rectangle $= L \times l = 12$ et $l = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \times L$
Om remplace l par $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \times L$

Aire du rectangle $= L \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \times L = 12$
$L^2 = \frac{12}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = 12 \times \frac{4}{3} = 12 \times \left(\frac{3+1}{3}\right) = 12 \times \left(\frac{3}{3}+\frac{1}{3}\right) = 12 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)$

$L^2 = 12 + 12 \times \frac{1}{3} = 12 + 4 = 16$
$L^2 = 16$, on sait que $L > 0$ doit $4 = L$

Om sait que $L \times l = 12$ et que $L = 4$, on a $4 \times l = 12$ donc $l = 3$
Ou bien, on peut écrire $l = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \times L$, $l = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \times 4 = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{4} \times 4 =$
$2 + 1 = 3$

Verificatiom : $L \times l = 4 \times 3 = 12$

Figure 10. *Proposition de Noa.*

Pour trouver la valeur exacte de la largeur et de la longueur, on a remarqué que Noa, comme beaucoup d'élèves, raisonnait avec des nombres entiers et non avec des fractions car, pour eux, les solutions étaient forcément entières.

On a ensuite comparé avec la traduction page 78 du document [1] qui signifie :

> Tu diviseras 1 par $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Il en résultera : $1\frac{1}{3}$. Multiplie ce 12, qui est la superficie, par $1\frac{1}{3}$, il en résultera : 16. Tu extrairas sa racine carrée, il en résultera 4 pour la longueur. $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ de 4 donc 3 pour la largeur.

J'ai alors demandé aux élèves d'effectuer les calculs cités :

- diviser 1 par $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ et vérifier que l'on trouve $1+\frac{1}{3}$;
- multiplier 12 par $1+\frac{1}{3}$;
- extraire la racine carrée du nombre trouvé pour calculer la mesure de la longueur du rectangle ;
- calculer $4 \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ pour trouver la largeur du rectangle.

Un bilan de cette étude

Une synthèse a été faite sur ce que les élèves estimaient avoir appris.

« J'ai appris qu'il existait un papyrus contenant des exercices de mathématiques. J'ai enrichi ma culture générale sur l'Égypte avec la lecture de hiéroglyphes. »

Figure 11. *Un élève qui a écrit son prénom en hiéroglyphes.*

Enfin, je les ai sollicités pour qu'ils proposent une ou plusieurs questions mathématiques que pouvait suggérer cette recherche. Les questions des élèves ont été nombreuses.

- *Comment devons-nous chercher pour être efficaces ?*

- *Comment les Égyptiens calculaient la diagonale du rectangle de côtés* 3 *et* 4 *?*
- *Les Égyptiens connaissaient-ils les puissances ?*
- *Comment a-t-on déchiffré les hiéroglyphes pour la première fois ?*
- *Pourrait-on faire des problèmes sur la vie quotidienne des Égyptiens ?*
- *Les chercheurs ont-ils déchiffré tous les hiéroglyphes ou en reste-t-il encore à trouver ?*
- *Pourquoi certains hiéroglyphes ressemblent à des plantes et à des animaux ?*
- *Est-ce que la démonstration existait chez les Égyptiens ?*

À la demande des élèves, nous reviendrons sur les mathématiques égyptiennes pendant les deux premiers jours de la Semaine des mathématiques 2024. Les trois derniers jours seront consacrés au thème 2024 « *L'important, c'est de participer* » en lien avec les Jeux Olympiques Paris 2024.

Références

[1] Daniel Austin et Michel Guillemot. *Quatre problèmes de dimensions*. . 2021.

[2] Viviane Koenig. *Le Livre-jeu des hiéroglyphes*. Éditions Larousse, 1999.

[3] Marianne Michel. *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*. Éditions Safran, 2014.

[4] Michel Guillemot et Françoise Marchesseau. *À propos de l'Égypte ancienne, des activités de géométrie*. Atelier animé lors des Journées Nationales de l'APMEP à Bordeaux. . Octobre 2018.

Françoise Marchesseau enseigne les mathématiques dans un lycée de Loire-Atlantique. Elle est active à la régionale de Nantes de l'APMEP et membre de l'association Fermat Science.

Sommaire du nº 550

Grandeurs