Le bulletin de l'APMEP - Nº 551

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Janvier, Février, Mars 2024

Maths en 3D

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

Au fil des maths – le bulletin de l'APMEP

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Éric ASTOUL, Stéphane FAVRE-BULLE, Adèle HUGUET, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Mars 2024. ISSN : 2608-9297.
Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE
ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin

Au fil des problèmes

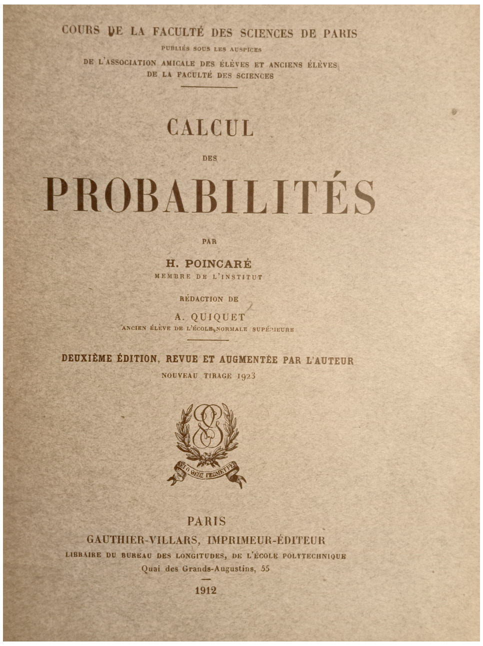
Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à :
frederic.deligt2@gmail.com
ou par courrier à :
Frédéric de Ligt
3 rue de la Pierrière
17270 MONTGUYON
Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.

Frédéric de Ligt

551-1 Une variante du problème de la poule à trois joueurs

Le problème de la poule est un vieux problème de probabilités qui apparaît pour la première fois en 1711 dans un échange entre Pierre Rémond de Montmort et un correspondant anglais, un certain Charles Waldegrave. Dans le cas de trois joueurs, voici la présentation qu'en fait Henri Poincaré dans son cours de calcul des probabilités (Gauthiers-Villars, 1912) :

Trois joueurs A, B *et* C *jouent aux conditions suivantes. Deux d'entre eux* A *et* B *jouent ensemble ;* C *ne joue pas. Le perdant sort et est remplacé par* C*. Après chaque partie, le perdant est remplacé. Le jeu prend fin quand un joueur gagne deux fois de suite. On suppose naturellement que le jeu est un jeu de hasard, et que la probabilité de gagner une partie est* $\frac{1}{2}$ *pour chaque joueur.*


COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS SOUS LES AUSPICES
DE L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

CALCUL
DES
PROBABILITÉS
PAR
H. POINCARÉ
MEMBRE DE L'INSTITUT
RÉDACTION DE
A. QUIQUET
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

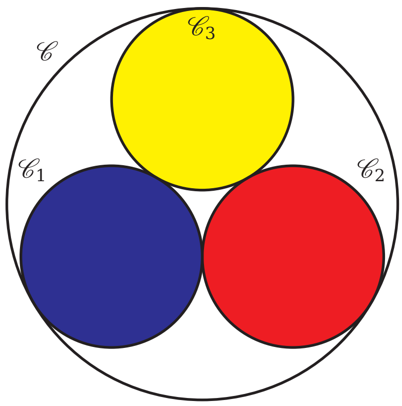
DEUXIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR
NOUVEAU TIRAGE 1923

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55
1912

Avec cette hypothèse d'équiprobabilité, le calcul montre que le joueur C est légèrement désavantagé. Quelle devrait être *a priori* pour C la probabilité de gagner contre A ou B afin de rendre ce jeu équitable ?

551-2 Une rosace trilobée (Serge Parpay - Niort)

Soit un cercle $\mathscr{C}$, construire trois cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de même rayon, tangents entre eux et tangents à $\mathscr{C}$.



551-3 La fraction magique (Daniel Perrin - Orsay)

Une légende raconte que seul Richard Latan, le sorcier de Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), est capable de fabriquer une fraction magique dont les premiers chiffres du développement décimal sont les chiffres du dénominateur (disons à 6 chiffres) comme par exemple :

$$\frac{57\,851}{240\,522} = 0{,}240\,522\ldots$$

Mais Richard Latan est-il vraiment le seul à savoir faire cela (quel que soit le nombre de chiffres considéré) ?

551-4 Bonne année (Vincent Thill - Migennes)

Résoudre en nombres entiers $ab + c = 2\,023$ et $a + bc = 2\,024$.

À propos des problèmes parus précédemment

549-1 Un joli sangaku

Pas de solution miraculeuse qui résoudrait la question de façon purement géométrique et rapidement. Le résultat final est pourtant simple : $\mathrm{CH} = 4r$.

Première méthode. La figure est inscrite dans un repère orthonormé et, soit les coordonnées des différents points sont calculées afin d'établir les valeurs de certaines distances (Ludovic Jany (Bolquère)), soit des distances sont calculées à partir des tangentes de certains angles (Maurice Bauval (Versailles)).

Seconde méthode. Les solutions exploitent la propriété bien connue que l'aire d'un triangle vaut le produit du demi-périmètre par le rayon de son cercle inscrit.

La condition d'égalité des rayons des cercles inscrits amènent Daniel Perrin (Orsay), Patrick David (Cergy) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques) à différentes équations algébriques, selon l'inconnue choisie, qui sont ensuite résolues.

De son côté, Jean-Noël Gers (Villeneuve d'Asq) fait observer que d'une part les rapport des aires et des périmètres des triangles ABD et CDH sont égaux, et d'autre part que les aires des triangles ABD et BCD sont dans le rapport de leurs bases AD et CD. Il en déduit une expression du rapport des périmètres des triangles ABD et CDH qui ne fait intervenir que les longueurs AD et CD. La suite est semblable aux autres solutions, avec la résolution d'une équation. La première partie de sa solution est sans doute celle qui amène le plus simplement à une équation.

549-2 À confirmer

Les contributeurs ont apporté à cette question des réponses de deux types.

Il y a ceux qui ont vu dans l'expression complexe proposée la forme d'une solution d'une équation du troisième degré. C'est le cas de Daniel Perrin (Orsay), de Patrick David (Cergy), de Florian Daval (Noyon), de Jean-Paul Thabaret (Thonon-les-Bains), de Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives), de Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques), de Ludovic Jany (Bolquère) et de Maurice Bauval (Versailles). Cette équation, une fois obtenue, n'a qu'une seule racine réelle et c'est 2.

Enfin il y a ceux qui ont effectué un changement de variable en posant $a = A^3 + 1$, comme Vincent Thill (Migennes), ou comme Alexandre Acciari (1re année Master MEEF 2nd degré, Nouvelle Calédonie) ou encore comme Daniel Vacaru (Pitesti, Roumanie). L'expression prend alors la forme évidente $(1 + A) + (1 - A) = 2$.

Et puis certains, tels Fabien Lombard (Sarrebourg) ou François Boucher (Gaillac), présentent les deux solutions.

Daniel Perrin généralise la question en introduisant un paramètre p^3 dans l'expression ; le cas de l'énoncé correspondant à $p = 2$. Il obtient ainsi une jolie relation dont le membre de droite vaut toujours p.

Fabien Lombard a relevé dans « *A course of pure mathematics* » de G.H. Hardy (C.U.P. 10e édition) à la page 37, que l'exercice 31 présente une forme générale (comportant d'ailleurs une coquille), avec un paramètre complémentaire b, qui redonne l'expression de l'énoncé pour $b = 1$. Il se trouve que cette expression est en fait équivalente à celle trouvée par Daniel Perrin en posant $b = \frac{p}{2}$.

549-3 Les rectangles amis

Les cinq couples de rectangles amis sont en définitive : $(3 \times 10 ; 2 \times 13)$, $(4 \times 6 ; 2 \times 10)$, $(5 \times 22 ; 1 \times 54)$, $(6 \times 13 ; 1 \times 38)$ et $(7 \times 10 ; 1 \times 34)$.

Les deux rectangles amis d'eux-mêmes sont 4×4 et 3×6.

Julien Sautier et Patrick David (Cergy) travaillent avec la moyenne harmonique de la longueur et de la largeur des rectangles amis. Ils établissent que celui des deux rectangles amis qui a la plus petite moyenne harmonique a une largeur comprise entre 1 et 4. Cette largeur est un paramètre d'une équation du second degré. L'étude de cette équation fait sortir les différentes solutions. Seules les valeurs 1 et 2 pour ce paramètre donnent les vrais rectangles amis.

Daniel Perrin (Orsay) montre que la plus petite largeur entre deux vrais rectangles amis ne peut valoir que 1 ou 2 ; ceci équivaut en fait à considérer la plus petite moyenne harmonique. Les solutions sortent cette fois en utilisant des propriétés de divisibilité.

Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques) examine les cas où une largeur vaut 1 ou 2 et obtient les différents couples de rectangles amis en utilisant aussi des propriétés de divisibilité. Si la plus petite largeur est au moins égale à 3, il n'en sort que deux solutions correspondant au deux rectangles amis d'eux-mêmes.

Ludovic Jany (Cergy) remarque qu'un des deux rectangles amis a une aire inférieure ou égale à son périmètre, celui-ci a alors une largeur comprise entre 1 et 4 et l'autre rectangle a une largeur comprise entre 4 et 8. En croisant ces différentes possibilités il obtient les sept solutions possibles.

549-4 Les poids

Daniel Perrin (Orsay), l'auteur de l'énoncé, répond ainsi aux différentes questions qu'il a posées.

- Question 1 : il y a une infinité de nombres possibles avec un poids donné à cause de la présence possible du zéro dans l'écriture décimale.
- Question 2 : trouver la quantité d'entiers, ne contenant pas de 0 dans leur écriture décimale, de poids donné s'avère difficile. Daniel Perrin donne seulement quelques exemples et un algorithme pour traiter le cas général. Mais pas de formule exacte ou asymptotique. Un défi à relever.
- Question 3 : le plus petit entier de poids donné p est de la forme $r99\ldots9$ avec q chiffres 9 où q et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de p par 9.
- Question 4 : le problème des poids que l'on peut obtenir avec des nombres ne comportant que quelques chiffres entre 0 et 9 est aussi partiellement résolu. Le cas de deux chiffres ne pose pas de vrai souci, mais à partir de trois chiffres le problème se complique…

Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths* à l'adresse : (onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES).

Sommaire du nº 551

Maths en 3D

CERCLE DE RECHERCHE ET D'ACTION PÉDAGOGIQUES

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr