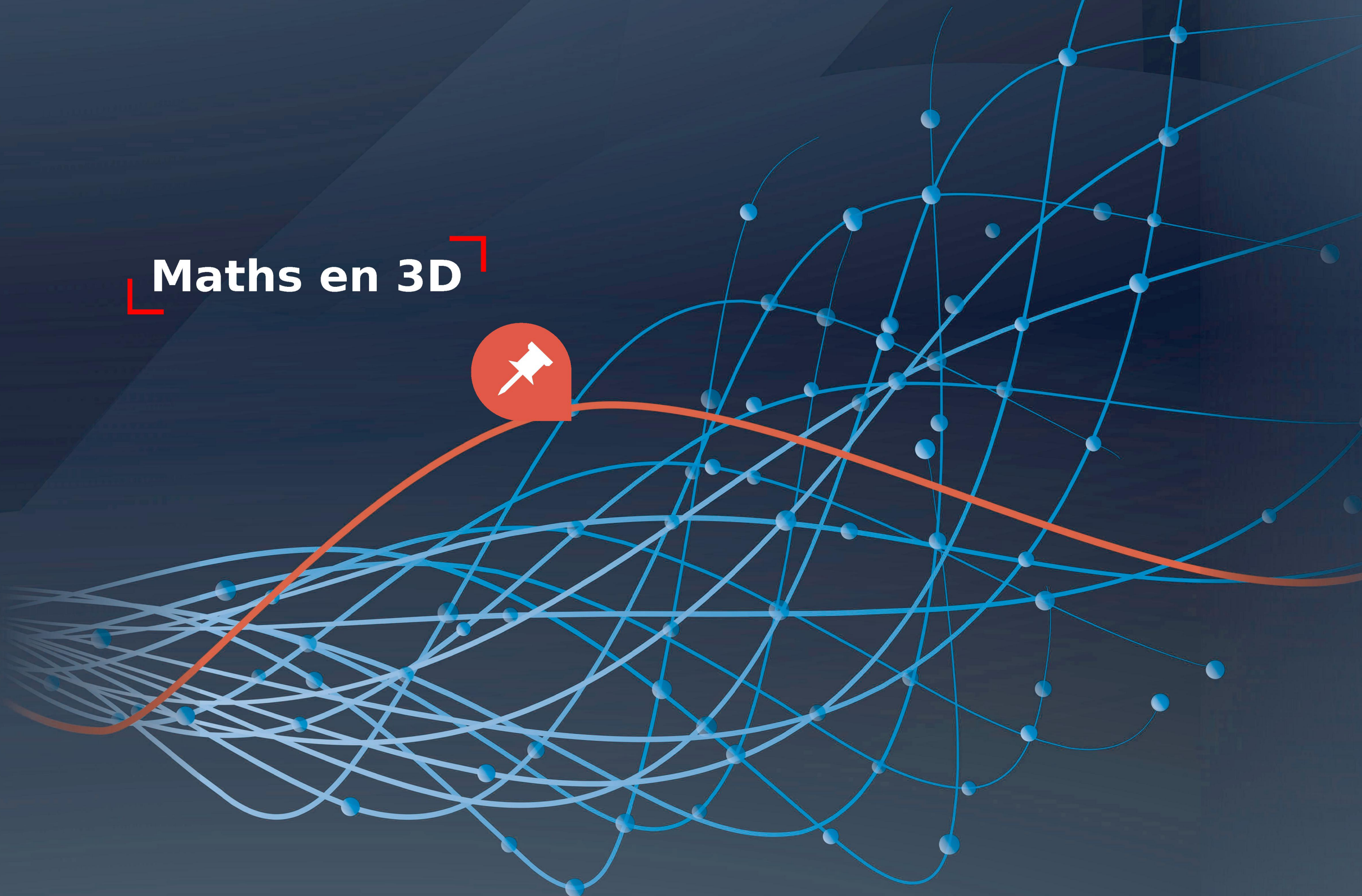
Le bulletin de l’APMEP - N° 551

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l’université

Édition Janvier, Février, Mars 2024

Maths en 3D



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

Au fil des maths – le bulletin de l'APMEP

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Mars 2024. ISSN : 2608-9297.
Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE
ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin

Fabrication de très grandes boîtes avec une feuille A4

Voilà un problème d'optimisation qui devrait fasciner vos élèves dès le cycle 3 ! Les auteures présentent des réflexions et productions fort intéressantes : de quoi puiser des idées originales à réinvestir dans vos classes.

Florence Soriano-Gafiuk & Manuella Freyermuth

Introduction

« *Chercher est peut-être la première des compétences à laquelle on pense lorsque l'on tente de décrire l'activité mathématique* » [1, p. 1]. Son développement conduit « à la pratique des problèmes ouverts, et plus largement des défis, dans la classe, mais aussi en dehors de la classe sous la forme de clubs, ateliers, concours » [1, p. 3].

Cet article propose d'illustrer ces lignes par l'étude d'un problème ouvert de géométrie dans l'espace, dont un énoncé succinct pourrait être :

> Fabrique des boîtes sans couvercle avec des feuilles de format A4.
> Quel plus grand volume de boîte parviens-tu à obtenir ?

ou bien, si les élèves ne connaissent pas encore la notion de volume :

> Quelles plus grandes boîtes peux-tu construire avec une feuille de format A4 ?

Ce problème d'optimisation a plusieurs fois été posé à des ateliers MATh.en.JEANS, une expérience qui vise à faire vivre les mathématiques par les jeunes selon les principes de la recherche mathématique. Il l'a été par exemple en 2016-2017 dans une classe d'élèves de CM2 de l'école Saint-Exupéry à Diebling (avec Céline Clément), en 2017-2018 dans un groupe d'élèves du collège Pierre Claude à Sarre-Union (avec Emmanuel Polewiak) et, en 2021-2022 dans un groupe d'élèves du collège Jean-Jacques Kieffer à Bitche (avec Manuella Freyermuth). Le travail présenté ici propose une découverte des productions de ces trois ateliers, et à travers cela, une redécouverte du sujet avec pour objectif final de donner envie aux enseignants des écoles élémentaires et des collèges d'investir ou de réinvestir ce problème de géométrie.

À propos de l'énoncé

Le sujet suggère, au moins dans un premier temps, la construction de patrons de solides (avec éventuellement les languettes) sur des feuilles de papier A4, c'est-à-dire la construction de figures géométriques planes en un seul morceau qui, une fois découpées, permettent par pliage (au niveau de certaines arêtes) et peut-être enroulement (autour de certaines faces) de reconstituer les solides considérés, sans superposition et sans découpage de faces. Le recours aux patrons impose donc des contraintes que le problème géométrique initial n'impose *a priori* pas. Les écoliers de CM2 qui, lors de la découverte du sujet, ne connaissent pas encore la notion de patron d'un solide, sont cognitivement plus libres que les collégiens.

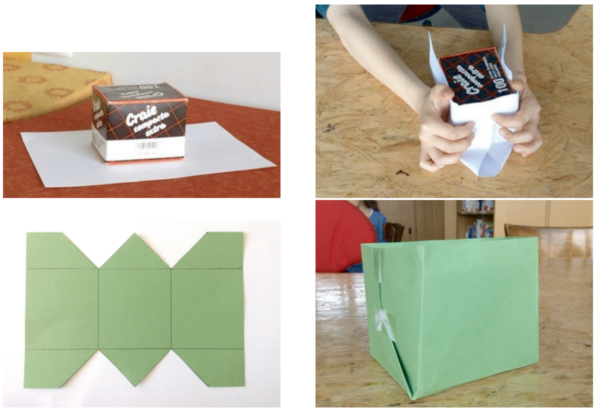


Figure 1. *L'emballage d'Alexis.*

C'est ainsi qu'Alexis (CM2) eut l'idée d'emballer une boîte de craies, comme il emballerait un paquet. L'étude de cet emballage a permis le tracé d'un gabarit qui ne respecte pas les contraintes imposées aux patrons, puisque deux faces latérales de la boîte cubique sont obtenues en rabattant trois morceaux du gabarit (un triangle isocèle et deux trapèzes rectangles). La boîte d'Alexis restera pendant plusieurs semaines la boîte de plus grand volume obtenue par les élèves.

Le sujet invite également à s'interroger sur le concept de « boîte sans couvercle ». Les échanges qui ont pu être menés avec les élèves ont cependant conduit à l'idée de supprimer une face du solide (ou plusieurs) de sorte que le nouveau solide obtenu ait une ouverture (et une seule) et puisse être qualifié de contenant. Par exemple, on ne supprimera pas la face latérale d'un cylindre ! L'enseignant peut profiter de ce débat pour rappeler que les boîtes ne sont pas forcément des pavés droits, de nombreux exemples issus de l'environnement des élèves illustrant ceci (pot à crayons cylindrique, boîte à livres hexagonale…).

Il est par ailleurs utile de détromper les élèves sur l'impression possible que toute boîte est dépliable/développable en une figure plane, autrement dit que tout objet de l'espace possède une représentation plane isométrique. La sphère, même perforée/trouée, offre un exemple de solide usuel pour lequel la fabrication d'un patron est impossible [2, p. 29].

Enfin, comme le sujet concerne l'optimisation d'un volume, et donc la comparaison, le calcul ou l'estimation de volumes, il est nécessaire de porter une attention sur les données numériques apportées par l'énoncé, et donc sur les dimensions d'une feuille de format A4. Dans le commerce, les dimensions indiquées en millimètres sur les ramettes de papier A4 sont 210×297. Ces deux mesures ne sont cependant que des valeurs approchées des dimensions L (longueur) et l (largeur) de la feuille, le format A4 devant satisfaire les conditions suivantes [3, p. 1-4] :

$$L = \sqrt{2} \times l \quad \text{et} \quad L \times l = \frac{1}{2^4} \text{ (en mètres carrés)}$$

ce qui donne :

$$L = \frac{1}{2^{\frac{7}{4}}} \quad \text{et} \quad l = \frac{1}{2^{\frac{9}{4}}} \text{ (en mètres)}$$

$$\begin{cases} L = 297{,}310\,778\dots \\ l = 210{,}224\,103\dots \end{cases} \text{(en millimètres).}$$

Les valeurs approchées 297 mm et 210 mm peuvent cependant être considérées comme suffisantes pour une approche effective des volumes des boîtes fabriquées par des élèves de cycle 3 ou 4. Ainsi, tout au long de cet article, les calculs seront effectués avec les valeurs des dimensions affichées dans le commerce.

Boîtes cubiques et comparaison directe des volumes (cycles 3 & 4)

La formule usuelle « la plus grande boîte » est ambiguë au sens mathématique du terme. Par la présence du superlatif « la plus », nous comprenons qu'il s'agit de comparer les boîtes. Nous ignorons en revanche s'il s'agit de comparer ces boîtes vis-à-vis de la hauteur, ou bien vis-à-vis de la contenance. Les élèves de CM2 de l'école de Diebling ont cependant rapidement donné du sens à la question en portant leur attention sur les cubes gigognes. Pour les écoliers, comparer (directement) deux boîtes était devenu « *essayer de les* rentrer *l'une dans* *l'autre, comme des boîtes gigognes* » (sic), ce qui revient à dire qu'une boîte est plus grande qu'une autre lorsque la contenance de la première est supérieure à la contenance de la seconde.

Figure 2. *Boîtes cubiques gigognes.*

Les élèves ont ensuite découvert un premier patron d'une boîte cubique sans couvercle (c'est-à-dire avec une face manquante de sorte que le nouveau gabarit obtenu puisse toujours être qualifié de patron), puis un second, se convainquant ainsi de la non-unicité du patron. Les élèves peuvent même, à partir des onze patrons du cube avec couvercle (à une isométrie près), déterminer les huit patrons du cube sans couvercle (à une isométrie près).

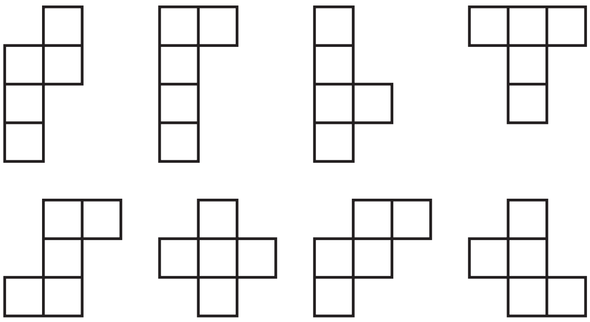
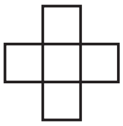
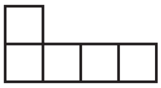


Figure 3. *Les huit patrons du cube sans couvercle.*

Comme l'illustrent ensuite les cubes gigognes, volume et arête d'un cube croissent ensemble[1]. Pour un patron donné (parmi les huit), il s'agira donc, pour maximiser le volume, de construire des faces carrées dont les longueurs des côtés sont les plus grandes possibles, mais sans déborder de la feuille de format A4. Autrement dit, il s'agira de construire un patron de sorte que la chute de papier soit minimale. La question est ensuite de savoir si les huit patrons aboutissent finalement au même volume maximal. Après différents « essais », expression utilisée par les élèves, l'attention de ces derniers est portée sur les deux patrons de boîte cubique sans couvercle suivants :



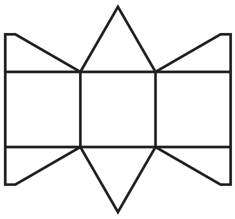
Le volume est maximal lorsque l'arête est égale à $\min\left(\frac{L}{3}\,;\,\frac{l}{3}\right) \approx 7{,}0\,\text{cm}$.



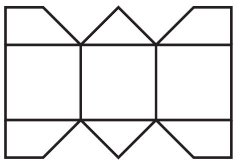
Le volume est maximal lorsque l'arête est égale à $\min\left(\frac{L}{4}\,;\,\frac{l}{2}\right) \approx 7{,}4\,\text{cm}$.

Comme le second patron permet d'obtenir un cube avec des arêtes/faces plus grandes, le volume maximal sera plus grand (*principe des cubes gigognes*). La formule du volume d'un cube donne : $V_{\text{maximal}} \approx 409\,\text{cm}^3$ (calcul effectué à partir des dimensions affichées dans le commerce[2]). On retiendra aussi que la longueur maximale d'une arête (et donc le volume maximal du cube) dépend du patron choisi.

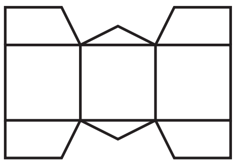
Il serait dommage de ne pas reprendre l'idée d'Alexis en s'autorisant à découper certaines faces du cube (par exemple, en deux trapèzes rectangles et un triangle isocèle). Si l'on note h la hauteur du triangle isocèle (la hauteur qui est également axe de symétrie) et c la longueur de l'arête du cube, plusieurs configurations apparaissent :



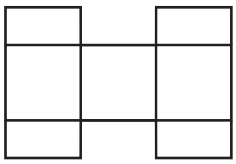
$h > \frac{c}{2}$



$h = \frac{c}{2}$



$0 < h < \frac{c}{2}$



$h = 0$ (cas limite)

1. Ce qui s'explique par le fait que la fonction $a \longmapsto a^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. En effectuant le calcul à partir des valeurs exactes des dimensions de la feuille, on aurait trouvé $V_{\text{maximal}} \approx 411\,\text{cm}^3$.

La surface d'une feuille de format A4 est rentabilisée lorsque $0 \leqslant h \leqslant \frac{c}{2}$ et $c = \min\left(\frac{L}{3}\,;\,\frac{l}{2}\right) \approx$ 9,91 cm (calcul effectué à partir des dimensions exactes de la feuille). D'après le principe des cubes gigognes selon lequel volume et arête croissent ensemble, la nouvelle boîte obtenue est plus grande que les précédentes. Plus précisément, on a : $V_{\text{maximal}} \approx 970\,\text{cm}^3$.

Boîtes parallélépipédiques rectangles et comparaison des contenances (cycles 3 & 4)

Cette section s'intéresse au cas des boîtes parallélépipédiques rectangles sans couvercles et à leurs patrons en forme de croix, construits en découpant à chaque coin d'une feuille de papier rectangulaire un carré. Les quatre carrés ainsi ôtés sont supposés superposables.

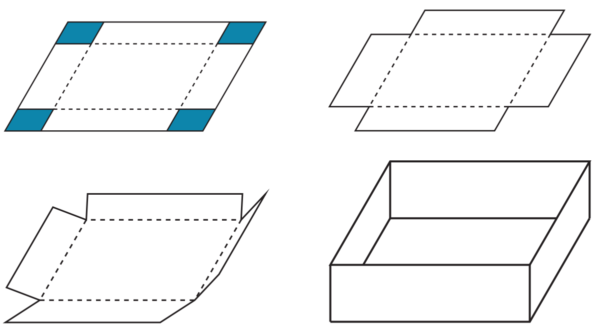


Figure 4. *Fabrication d'une boîte parallélépipédique rectangle (sans couvercle).*

Les élèves construisent ainsi différentes boîtes pour tenter dans un second temps de les classer, du contenant le plus petit au contenant le plus grand. Il leur faudra cependant un certain temps pour intégrer l'idée qu'il n'est pas toujours possible de comparer directement les contenances de deux boîtes parallélépipédiques rectangles, certaines étant plus larges, d'autres plus profondes et d'autres encore plus hautes. Si, dans la section précédente, un seul paramètre (longueur de l'arête) intervenait, trois paramètres (la longueur, la largeur et la hauteur) sont à présent en jeu, ce qui change forcément la nature des procédures de comparaison. Le défi consiste donc à déterminer un nouvel algorithme de classement des boîtes (vis-à-vis de la contenance).

Puisque le volume d'une boîte mesure l'espace intérieur et puisque la contenance mesure la quantité qui peut être contenue (en conservant la possibilité de fermer la boîte), le volume et la contenance apparaissent comme deux grandeurs proportionnelles. Les élèves comprennent ainsi qu'il suffira pour identifier les plus grandes boîtes de comparer les contenances de celles-ci. Une question se pose alors concernant le choix du contenu, la contenance ne pouvant être mesurée que si le contenu occupe bien tout l'espace intérieur du contenant.

L'eau occupe par exemple tout l'espace qu'on lui offre, mais elle constitue un excellent solvant : les boîtes en papier/carton ne résisteront pas. Des réponses variées peuvent être données par les élèves : bonbons, noisettes, nouilles, lentilles, grains de riz, graines de blé, de lin ou de pavot, semoule, farine, etc. L'idée est de remplir les boîtes avec une substance qui possède certaines propriétés physiques de l'eau, telles que la capacité à opposer une faible résistance si on change la forme du contenant (la substance occupe tout l'espace de la boîte) et à opposer une forte résistance si on change le volume du contenant (la substance est difficilement compressible). Les bonbons, les noisettes et les nouilles ne constituent pas des matières granulaires suffisamment fines : ils n'épousent pas les formes des récipients.

Dans certaines filières (bois, céréales, BTP…), la notion de *volume en vrac* ou de *volume apparent* est utilisée : il s'agit du volume occupé par une matière granulaire, espaces entre chaque granulé compris. Le volume en vrac (déversement de façon aléatoire dans un récipient) dépend de l'agencement des granulés, mais aussi du récipient. Pour un très grand nombre donné de granulés, c'est-à-dire lorsque les dimensions du contenant sont très grandes devant celles des granulés, le volume en vrac devient une mesure suffisamment proche de la contenance de la boîte. L'idée est donc de choisir une substance granulaire suffisamment fine. La farine est par exemple une matière intéressante puisqu'elle est fine — elle adhère cependant aux textiles et à la peau, et exige un temps de nettoyage des surfaces farinées. Les prix d'achat des lentilles vertes, des graines de lin ou de pavot (matières fines) sont plus élevés. La semoule, les graines de blé et le riz peuvent être utilisés, même s'il n'est jamais vain de rappeler aux élèves la nécessité de lutter contre le gaspillage alimentaire et d'une manière générale, de ne pas jouer avec la nourriture. Les graines de blé ont l'avantage de pouvoir, à l'issue des expérimentations, être offertes aux oiseaux de la cour de récréation de l'école — même si elles ne constituent cependant pas la matière granulaire la plus fine parmi celles précitées. Dans tous les cas, il appartiendra à l'enseignant de retenir, selon ses préférences et objectifs, l'une ou l'autre des suggestions des élèves.

Pour une substance granulaire suffisamment fine, volume de la boîte et volume en vrac (contenance) d'une part, puis volume en vrac et masse du contenu d'autre part, sont proportionnels, si bien que, par transitivité, volume de la boîte et masse du contenu sont également proportionnels. Pour comparer les volumes des différentes boîtes fabriquées, il suffira donc de remplir lesdites boîtes, par exemple de semoule moyenne — nous respecterons ainsi le choix des élèves de l'école de Saint-Exupéry à Diebling et du collège Jean-Jacques Kieffer à Bitche —, et ensuite de comparer entre elles les masses de semoule contenue dans chacune des boîtes fabriquées.

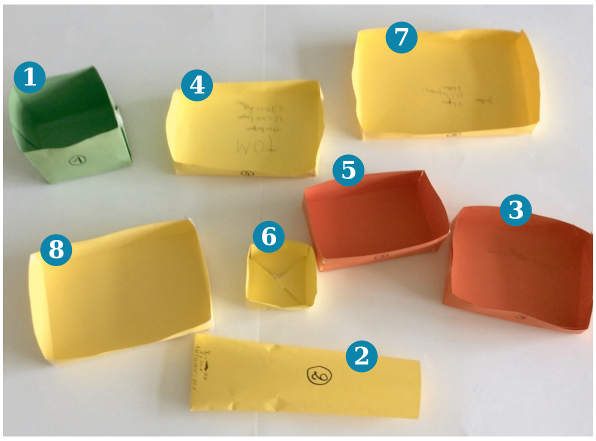


Figure 5. *Premières boîtes réalisées par les écoliers de Diebling.*

Ces propos sont illustrés par les résultats obtenus par les élèves de Diebling (fig. 5), ces derniers ayant fabriqué huit boîtes en papier : la première boîte correspond à la boîte d'Alexis, la seconde ressemble davantage à une pochette, et les six autres sont des pavés droits constitués à partir de patrons en forme de croix.

Numéro de la boîte	Masse de la semoule (moyenne) contenue
1	776 g
2	48 g
3	695 g
4	628 g
5	901 g
6	198 g
7	797 g
8	692 g

Selon le niveau de la classe et la progression des enseignements, le professeur pourra décider de poursuivre ou non l'activité. Une recherche sur la toile des densités apparentes (la densité apparente est la masse volumique apparente, c'est-à-dire le rapport de la masse par le volume en vrac ; il est intéressant de noter qu'en Allemagne, les notions de volume en vrac/volume apparent — *Schüttvolumen* —, de densité apparente — *Schüttdichte* — et de masse de mille grains — *Tausendkorngewicht* — sont utilisées en séance de mathématiques pour le traitement de problèmes d'estimation de type Fermi — *Schätzaufgaben*) de différentes matières granulaires permet en effet de dresser un tableau comparable à celui ci-dessous (après certaines conversions d'unités).

	Masse d'un cm^3 en vrac
Lentilles vertes	0,83 g
Grains de riz	0,90 g
Graines de blé	0,79 g
Graines de lin	0,62 g
Graines de pavot	0,62 g
Farine	0,50 g

Ces données restent à considérer avec prudence, la densité apparente dépendant de la taille des graines (informations non forcément indiquées sur les pages web consultées). Le cas de la semoule illustre ces derniers propos.

À l'aide d'un verre doseur et d'une balance, on peut estimer les masses d'un cm^3 de semoule fine et d'un cm^3 de semoule moyenne *via* certaines règles de proportionnalité. Comme prévu, pour le même volume en vrac, la masse de la semoule fine est supérieure à celle de la semoule moyenne (d'environ 5 %), l'agencement entre les granulés se faisant mieux avec la semoule fine.

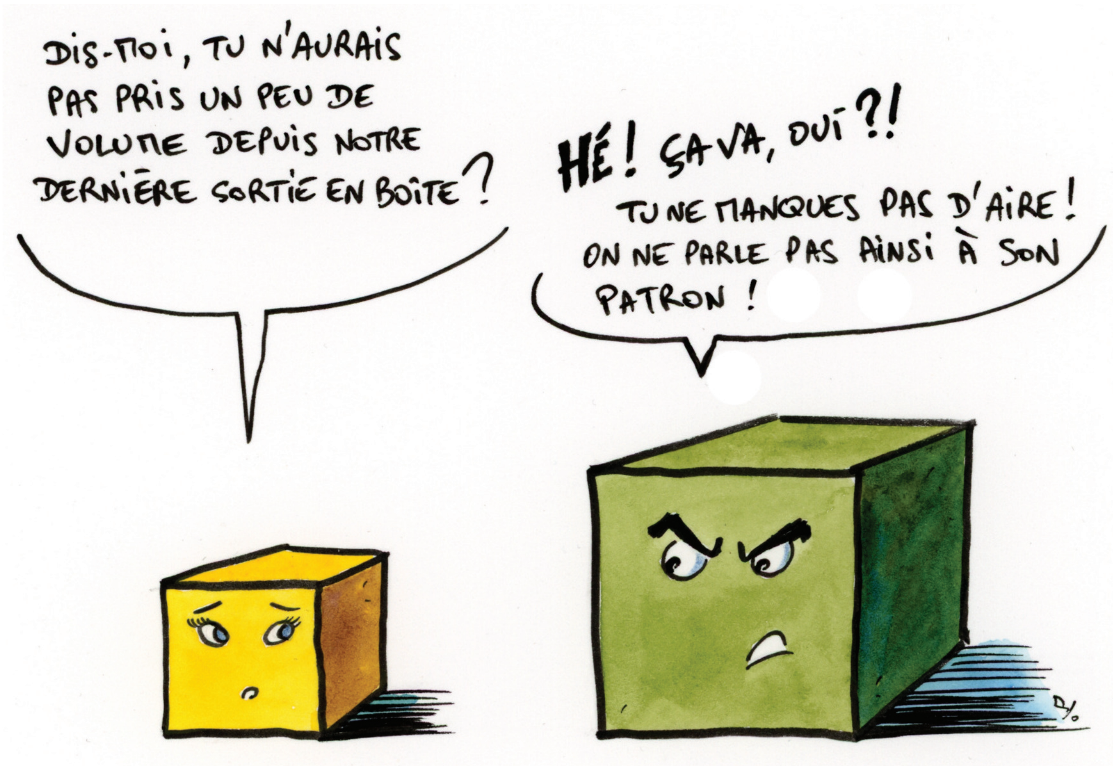
Figure 6. *Expérience pour la détermination des densités apparentes des semoules.*

- On pèse le verre doseur.
- On pèse 50 cL de semoule (ou 100 cL).
- On ôte la masse du verre doseur.

	Masse d'un cm^3 de semoule en vrac
Semoule fine	0,84 g
Semoule moyenne	0,80 g

Ces données permettent de donner une estimation du volume de chaque boîte fabriquée, après en avoir pesé les contenus.

Par exemple, d'après les calculs des élèves (figure 5), la plus grande boîte fabriquée a un volume d'environ 1 126 cm^3.



Conclusion

Ainsi s'achève la première partie de cet article. Les expérimentations proposées ont illustré combien les mathématiques peuvent être accessibles et combien s'y adonner peut devenir un vrai plaisir. Au cours de ces activités, les jeunes apprentis-chercheurs (cycles 3 & 4) ont en effet révélé une certaine ingéniosité tant dans leurs manipulations que dans leurs analyses, offrant ainsi aux professeurs des occasions de valoriser leurs productions. Les ateliers se sont aussi présentés comme des opportunités de développement professionnel pour les enseignants qui ont été parfois engagés à réinterroger leurs savoirs face aux idées et suggestions des élèves (comme l'écolier Alexis).

Concernant les calculs présentés au fil des pages de cette première partie, la plus haute marche du podium a été atteinte en considérant une boîte parallélépipédique rectangle dont le volume est égal à environ $1\,126\,\text{cm}^3$. Une première question s'impose alors : est-il possible d'affiner ce résultat en considérant toujours des pavés droits, mais en recourant à des outils mathématiques propres au cycle 4 ? Les échanges avec les élèves ont par ailleurs permis de rappeler qu'une boîte n'a pas forcément une forme parallélépipédique rectangle. Cette remarque ouvre la voie à une seconde question : est-il possible de fabriquer des boîtes présentant de nouvelles formes, mais dont les volumes dépassent le score obtenu avec les pavés droits ? La suite de cet article (parution dans un prochain numéro d'*Au fil des maths*) tentera de répondre à ces deux questions en se concentrant sur le cycle 4.

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale. Direction de l'enseignement scolaire. « Cycle 4. Mathématiques. Compétences travaillées en mathématiques ». In : *eduscol.education.fr* (mars 2016). , p. 1-3.

[2] M. Berger. *Géométrie. 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères*. Paris : Cédic/Fernand-Nathan, 1977, p. 29.

[3] M. Délèze. *Dimensions exactes des formats A*. . 2023.

Florence Soriano-Gafiuk est professeure des universités à l'université de Lorraine. Elle intervient dans la formation des enseignants.

Manuella Freyermuth est professeure de mathématiques au collège Jean-Jacques Kieffer à Bitche, dans l'académie de Nancy-Metz.

florence.soriano-gafiuk@univ-lorraine.fr

Sommaire du nº 551

Maths en 3D

APMEP

www.apmep.fr