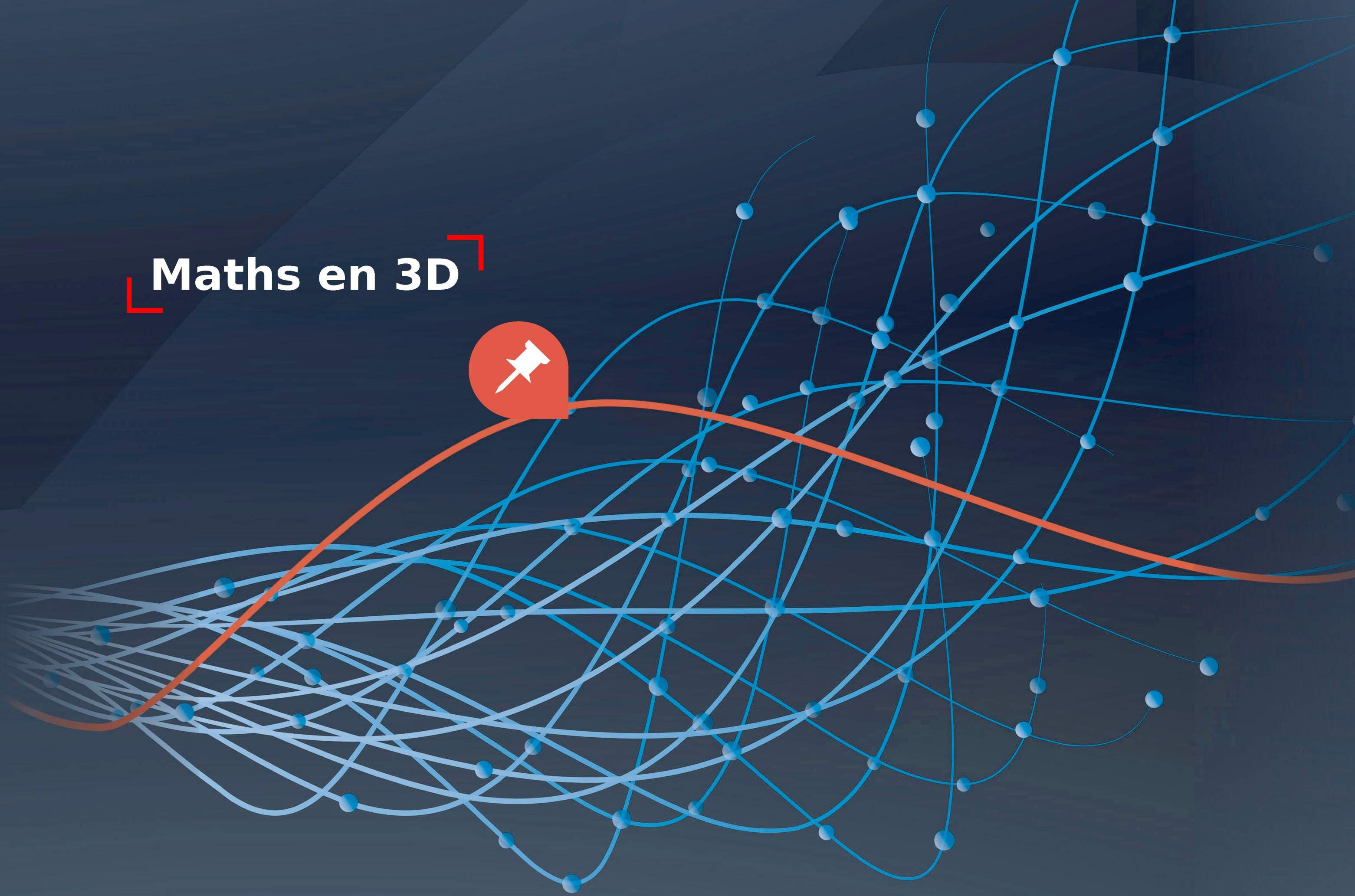
Le bulletin de l'APMEP - N° 551

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Janvier, Février, Mars 2024



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Éric ASTOUL, Stéphane FAVRE-BULLE, Adèle HUGUET, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

APMEP

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Mars 2024. ISSN : 2608-9297.
Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE
ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin

Le temps des cerises

Pour faire suite au gratin d'aubergines de Pierre Pansu (dans notre nº 548), voici le dessert : le clafoutis aux cerises de Séverine Verneyre et Karim Zayana.

Séverine Verneyre & Karim Zayana

Cuisiner c'est un peu croquer des mathématiques. Parce qu'en faisant son marché on compte sa monnaie. Parce qu'il faut jongler d'une unité à l'autre, fractionner, proportionner, distinguer le continu — rendu par un fluide, du discret — rendu par un nombre entier d'œufs, de gousses de vanille, de carreaux de chocolat ou de morceaux de sucre. Parce qu'on réalise sans cesse des mesures de temps, de masse, de volume ou de température (positives au four, négatives au congélateur). Parce qu'on s'autorise à tâtonner, inventer puis consigner son protocole comme on créerait et graverait un théorème. Parce que dans son caractère impératif et séquencé, dans ses entrées et dans ses sorties, une recette ressemble à un algorithme. Parce qu'on y tolère malgré tout marges et à peu près — sur la pincée de sel, le filet d'huile, le bol de crème, la larme de miel, la main de beurre, le souffle de levain — comme autant d'approximations scientifiques.

Pour toutes ces bonnes raisons, les programmes scolaires, notamment ceux de l'école élémentaire, feront faire un jour ou l'autre à nos élèves et nos enfants un savoureux gâteau [1, 2].

La « tâche complexe » présentée ci-dessous autour du clafoutis, rehaussée du secret exclusif de sa pâte, pourra nourrir ceux qui s'y essaient de gourmandes activités géométriques, du plan et de l'espace, mais aussi pratiques. De moins de 7 à plus de 77 ans.

Le problème du clafoutis

Le problème du clafoutis

Après avoir collé-serré des cerises entières (en moyenne, ⌀ = 17,6 mm) au fond d'un moule circulaire (⌀ = 22 cm), on recherche le volume de pâte à verser pour le remplir à hauteur de 2,5 cm. Dans un souci de simplification, on admettra que les cerises, alourdies par leurs noyaux, seront complètement immergées dans l'appareil et qu'au vu des dimensions citées, se répartiront en une seule couche.

Avis aux amateurs : avant de déguster, enfourner à 180 °C jusqu'à ce que le clafoutis soit doré (35 minutes environ) puis laisser tiédir (figure 1). Des variantes existent, en dénoyautant les cerises ou en leur préférant des merises. Toutes proportions gardées, la recette authentique donnant 1 L de pâte est annexée en fin d'article.

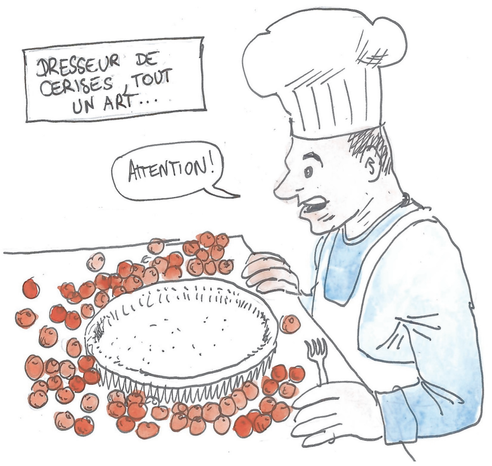
Figure 1. *Trois étapes de l'élaboration du clafoutis. 1) Disposer les cerises les unes contre les autres, ici en cercles. 2) Garnir le moule de la pâte ; ceci immerge les cerises. 3) Après cuisson, déguster !*

Après avoir estimé le nombre N de cerises qui tapissent le moule, nous en déduirons le volume de fruit correspondant puis, par différence, la quantité de préparation nécessaire.

Nombre N de cerises

Notons R le rayon, en cm, du moule et r celui d'une cerise ordinaire. Le rayon du moule $R = 11$ cm a été mesuré au mètre ruban. Le rayon $r = 0{,}88$ cm a, quant à lui, été moyenné sur un échantillon représentatif et significatif de trente cerises. Pour éviter que les aliments ne s'écrasent et ne tachent lors des mesures, réalisées au pied à coulisse, ils ont d'abord été congelés. Tout juste sortis du *freezer*, un dépôt de givre est d'ailleurs perceptible sur la photographie de gauche en figure 1.

Calculer le nombre N de cerises à mettre côte à côte n'est pas si simple. Quelle que soit la manière de s'y prendre, il planera toujours un doute. Sur le calibre des cerises, qui ne sera jamais qu'une mesure moyenne — et donc souvent… moyenne — et sur la façon d'agencer les fruits dans le moule, plus ou moins optimale.



Pour se faire une idée du résultat, commençons par diviser la surface du plat, πR^2, par celle d'une cerise mise à plat, πr^2, en évaluant donc

$$\frac{R^2}{r^2} = 156{,}25. \tag{1}$$

Ceci majore grossièrement le nombre N. En effet, on ne pave pas un plan, pas davantage un disque, avec de petits cercles. Des espaces seront perdus dans les interstices. D'autres le seront encore au voisinage du contour car les cerises, entières, doivent rester unes et indivisibles.

Une première méthode consiste à ranger les cerises en lignes droites. Quitte à les inscrire (par l'esprit) dans des cubes, ceci revient, vu de dessus, à carreler le disque de rayon R avec un motif carré de côté $2r$ (figure 2). En rapportant l'aire du disque à celui du carré, on obtient

$$\frac{\pi R^2}{(2r)^2} \simeq 122{,}7 \tag{2}$$

qui constitue une approximation du nombre N, que les effets de bord obligeraient à rogner de quelques pour cent.

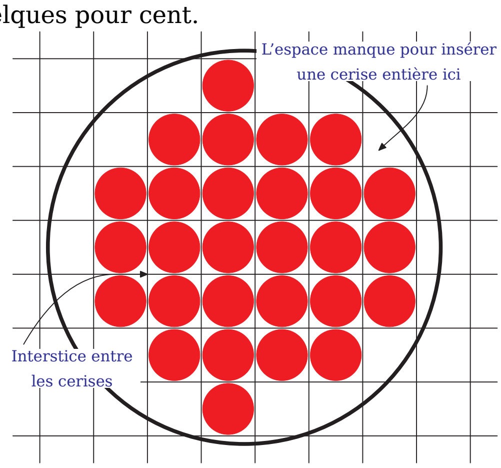
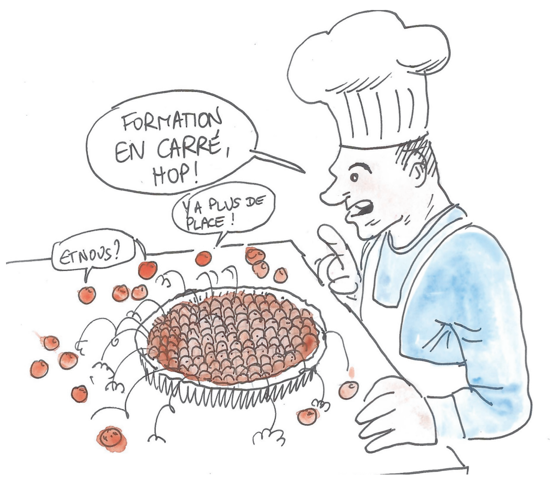


Figure 2. *Disposition en lignes des cerises. Des espaces sont perdus aux interstices. De plus, la répartition sur chaque ligne ne tombe en général pas juste : des espaces y sont à nouveau perdus aux extrémités, faisant l'effet d'une « pixellisation » du contour.*



On gagnerait en compacité à désaligner légèrement les cerises [3]. Dans une deuxième méthode, on les place en quinconce. Quitte à les inscrire (par l'esprit) dans des alvéoles, ceci revient à paver le disque de rayon R avec un motif hexagonal de côté $\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$, comme on calepinerait une pièce (circulaire) de tomettes, figures 3 et 4. En rapportant l'aire du disque à celui de l'hexagone, on obtient

$$\frac{\pi R^2}{6\,\dfrac{r^2\sqrt{3}}{3}} \simeq 141{,}7 \qquad (3)$$

valeur qu'il convient, ici aussi, de revoir à la baisse en raison du contour.

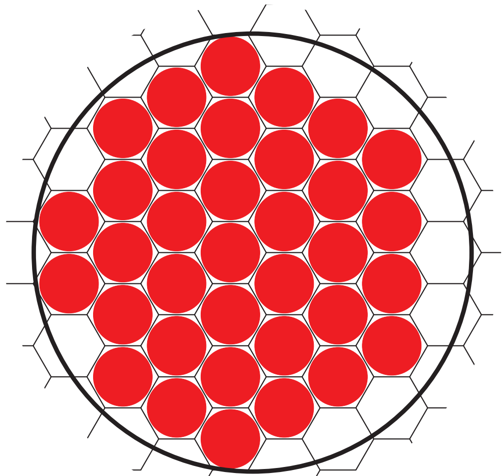
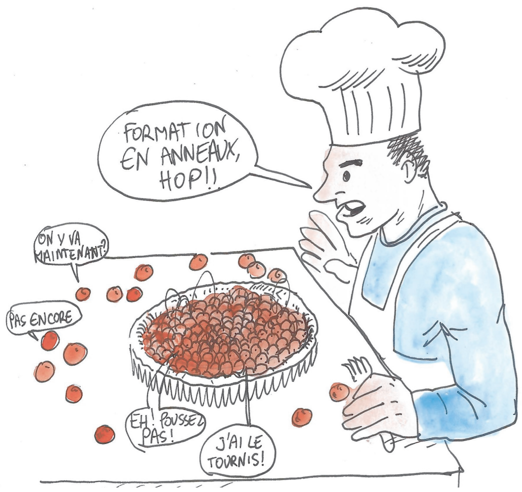


Figure 3. *Organisation en quinconce des cerises, qui ne sont plus alignées horizontalement. L'arrangement est plus dense qu'en figure 2 car les espaces perdus aux interstices sont moindres. En effet, l'aire de l'hexagone (régulier) circonscrit à un cercle est moindre que celle du carré circonscrit à ce même cercle.*



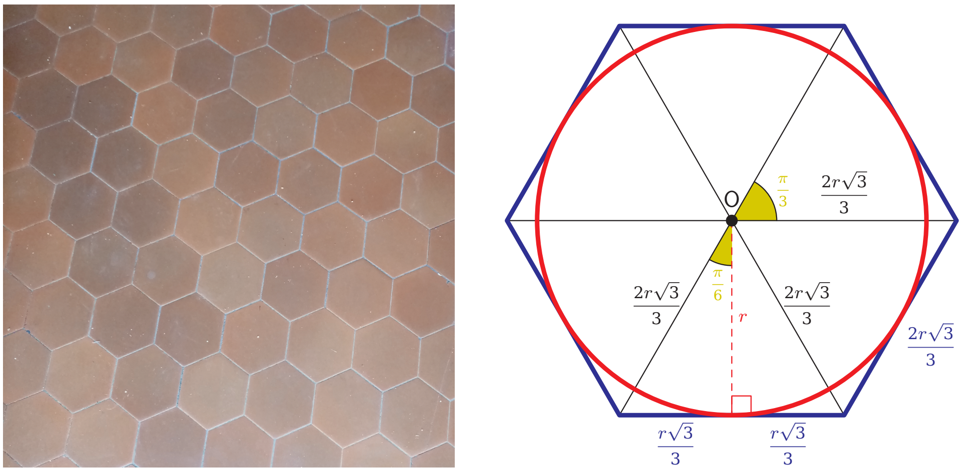


Figure 4. *Un exemple pratique de dallage en tomettes (à gauche) et le détail du motif hexagonal (à droite). L'homme n'a rien inventé : cette configuration en nid d'abeilles se retrouve dans les ruches !*

Épousant mieux la bordure du moule, nous avons choisi une distribution circulaire telle qu'on en croise sur les routes, terrasses ou trottoirs, figure 5. Produisant un arrangement moins dense, cette troisième méthode a elle aussi son charme. Mais elle soulève plusieurs questions.

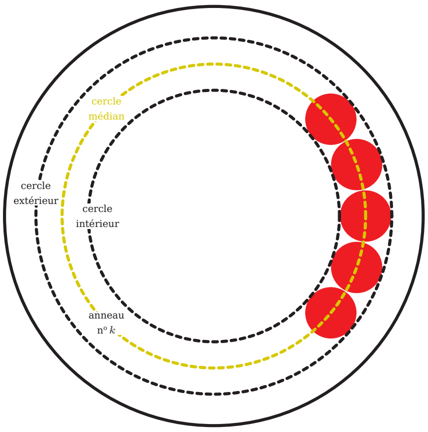


Figure 5. *Un exemple pratique de dallage circulaire au milieu d'un carrefour (à gauche) et le détail d'un anneau qui le compose (à droite) quand on remplace, par la pensée, les pavés par des cerises.*

De combien d'anneaux de cerises le plat est-il rempli ?

Centrons une première cerise, depuis laquelle rayonnent des anneaux concentriques. Le cercle intérieur du premier anneau a pour rayon r, le cercle extérieur, $3r$. De façon générale, le k-ième anneau est délimité par les cercles de rayons $(2k-1)r$ et $(2k+1)r$. Le nombre K d'anneaux est le plus grand entier k vérifiant $(2k+1)r \leqslant R$.

De ce fait, $K \leqslant \dfrac{R-r}{2r}$.

Combien de cerises par anneau ?

Dès qu'on s'éloigne un peu du centre, le diamètre d'une cerise devient tout petit devant celui (intérieur comme extérieur) d'un anneau. Nous considérerons donc que les diamètres $2r$ des cerises mis bout à bout recouvrent le périmètre médian de l'anneau, long de $2\pi(2kr)$. Ce faisant, nous approximons le cercle médian du k-ième anneau par un polygone régulier à N_k côtés, comme autant de cerises qu'il enchaîne. Nous en tirons $N_k \leqslant 2\pi k$.

Combien de cerises ?

Le nombre N total de cerises dont nous garnirons le moule se laisse alors majorer :

$$\begin{aligned} N &= 1 + \sum_{k=1}^{K} N_k \\ &\leqslant 1 + 2\pi \sum_{k=1}^{K} k = 1 + 2\pi \frac{K(K+1)}{2} \end{aligned}$$

donc

$$N \leqslant 1 + \pi \left(\frac{R-r}{2r}\right)\left(\frac{R+r}{2r}\right)$$

c'est-à-dire

$$N \leqslant 1 + \pi \frac{R^2 - r^2}{4r^2} \simeq 122{,}9. \qquad (4)$$

Avec, dans les faits, 115 cerises consommées, nous avons frisé ce maximum. En jouant sur l'élasticité des fruits. Mais aussi sur le dressage puisqu'à mesure que la pâte est versée, des cerises se grimpent en partie[1] les unes sur les autres ; c'était bien la peine de ne pas toutes les étaler en vrac ! Bref, il n'a, en pratique, pas été utile de corriger tant que cela la valeur théorique que renvoie (4).

Volume de pâte

Le nombre N désormais connu (par le calcul ou l'expérience), déterminons le volume de pâte nécessaire.

Le volume moyen $\mathscr{V}_c$ d'une cerise est

$$\mathscr{V}_c = \frac{4}{3}\pi r^3 \simeq 2{,}85\,\mathrm{cm}^3.$$

On prend $N = 123$ pour les applications numériques ; le volume total des cerises, $\mathscr{V}_C$, vaut donc

$$\mathscr{V}_C = \frac{4N}{3}\pi r^3 \simeq 350\,\mathrm{cm}^3.$$

1. En partie seulement, elles ne forment bien qu'un étage.

Rempli jusqu'à hauteur h de 2,5 cm, la contenance $\mathscr{V}_M$ du moule est

$$\mathscr{V}_M = \pi R^2 h \simeq 950\,\text{cm}^3.$$

Les cerises seront noyées dans l'appareil. Il nous faut donc environ $950\,\text{cm}^3 - 350\,\text{cm}^3$, qui valent $600\,\text{cm}^3$ de préparation, à savoir 600 mL, ou encore 0,6 L.

La recette authentique pour 1 L de pâte

Liste d'ingrédients : 90 g de Maïzena, 120 g de sucre en poudre, 1 sachet de sucre vanillé, 1 pincée de sel, 3 œufs fermiers entiers et 3 jaunes, 40 cL de lait, 20 cL de crème liquide.

Mode opératoire : mélanger la Maïzena, le sucre, le sucre vanillé, les œufs entiers et les jaunes ; incorporer progressivement le lait et la crème ; bien mélanger pour obtenir une pâte homogène et fluide. Mmmm… Les mathématiques, c'est bon !

La recette classique donnée ci-dessous vaut pour 1 L de pâte. Pour 0,6 L, on réduit *mutatis mutandis* les ingrédients. Les 3 œufs fermiers entiers deviennent… 1,8… arrondi bien sûr à 2.

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale. « Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2) ». In : *Bulletin officiel spécial* nº 31 (30 juillet 2020).

[2] Ministère de l'Éducation nationale. « Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3) ». In : *Bulletin officiel spécial* nº 31 (30 juillet 2020).

[3] C. Rousseau. « Quel est l'empilement le plus dense ? » In : *Accromath* 13.1 (hiver-printemps 2018).

Séverine Verneyre est professeure de mathématiques spéciales au lycée Champollion à Grenoble (Isère).
Karim Zayana est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques).

severine.verneyre@ac-grenoble.fr
karim.zayana@igesr.gouv.fr

Sommaire du nº 551

Maths en 3D

CERCLE DE RECHERCHE ET D'ACTION PÉDAGOGIQUES

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr