Petite enquête sur…

être ou ne pas être…

complément numérique

François Boucher développe dans ce complément quelques points de la petite enquête « être ou ne pas être » [1], l'idée étant toujours de proposer des problèmes susceptibles d'être abordés à différents niveaux de la scolarité, franchement au-delà pour une bonne partie d'entre eux.

François Boucher

Rationnels et d.d.i.p.

Les d.d.i.p. (développement décimal illimité périodique) s'introduisent plus ou moins naturellement avec, certes, un statut incertain, mais autant que celui des fractions. Le thème est de questionner la possibilité et la validité des calculs sur ces objets sur une base volontairement intuitive. Si dans une écriture comme 4,217 357 357 357 35 ..., l'infini est potentiellement présent dans les « ... » donc questionne dans les calculs éventuels, il disparaît dans l'écriture $4{,}21\overline{735}$: sémiotiques distinctes conduisant à des problématiques différentes ainsi que la suite va le mettre en évidence. La deuxième incite à penser un d.d.i.p. comme un triplet de mots : la partie entière, la partie non périodique, la période. Nous passerons sous silence les problèmes mathématiques afférents, en particulier ceux de l'égalité et de l'unicité d'écriture, de la classique $0{,}\overline{9} = 1$ à la curieuse $4{,}21\overline{735} = 4{,}217\overline{357}$ en se contentant d'une évidence visuelle mieux perceptible sur l'écriture avec des « ... ».

Faire des opérations sur des d.d.i.p. *sans passer par leur écriture rationnelle* est un problème qui a peut-être titillé bien des collègues. Ce n'est que récemment que Benoît Rittaud et Laurent Vivier [1] ont proposé des algorithmes pour les quatre opérations avec l'intention de construire $\mathbb{Q}$ à partir des d.d.i.p. tout comme, il y a cinquante ans, le Bulletin de l'APMEP a pu proposer de construire $\mathbb{R}$ à partir des d.d.i. en … Quatrième !

Il est possible de donner une idée de ces algorithmes sur quelques exemples.

Addition

Le cas de l'addition est simple : prenons par exemple

$$s = 0{,}\overline{437\,6} + 0{,}64\overline{297\,815}.$$

On commence par réécrire $s = 0{,}43\overline{7\,643} + 0{,}64\overline{297\,815}$ avec une intention claire : se ramener à calculer une somme de deux d.d.i.p. sans partie non périodique. On se ramène ainsi au calcul de

$$t = 0\overline{7\,643} + 0\overline{297\,815}.$$

Ensuite l'idée est de manipuler les périodes : on prend le PPCM des longueurs des deux périodes, ici 12, et t se réécrit $t = 0{,}\overline{764\,376\,437\,643} + 0{,}\overline{297\,815\,297\,815}$; puis on ajoute comme des entiers les « mots périodes »

$$764\,376\,437\,643 + 297\,815\,297\,815 = 1\,062\,191\,735\,458$$

qui donne un mot à 13 chiffres ; on transfère alors le 1 de retenue à gauche au dernier chiffre à droite ce qui ne surprend pas puisque cette retenue « arrive de la droite », soit 062 191 735 459, en conservant le 0, ce qui donne la période ; et cette retenue est aussi à ajouter à droite à la partie entière de t : $t = 1\overline{062\,191\,735\,459}$.

Finalement, tous calculs faits, on obtient $s = 1{,}08\overline{062\,191\,735\,459}$.

1. PE551 dans la suite.

L'exemple précédent est tout à fait générique ; en additionnant deux périodes de même longueur, la retenue finale sera au plus 1, auquel cas on la transfère à droite et une fois à gauche pour donner la partie entière ; la somme a alors une période de même longueur (ou possiblement un diviseur de cette longueur).

Laissons au lecteur le plaisir d'étudier la soustraction avec le matériel introduit.

On en « déduit » le produit d'un d.d.i.p. par un entier via une addition itérée. Il y a quelques problèmes à percevoir.

Multiplication par un entier

Ainsi le produit de $0,\overline{453}$ par 17 s'obtient en calculant le produit $453 \times 17 = 7\,701$ qui fournit, par transfert de retenue, la période 708 et la partie entière 7 : $0,\overline{453} \times 17 = 7,\overline{708}$. Le cas est simple, mais, histoire de bien questionner le transfert de retenue, le produit de $0,\overline{453}$ par 987 654 321 conduit à calculer $453 \times 987\,654\,321$ qui fournira *in fine* la période 675 et la partie entière 447 855 262 avec de jolis transferts itérés de retenue, à gauche et à droite.

Le produit par un décimal s'ensuit naturellement en jouant avec la virgule.

Le produit de deux d.d.p.i. pose plus de difficulté et demande un peu plus d'arithmétique.

Multiplication de deux d.d.i.p.

Prenons à nouveau un exemple : $0,\overline{1} \times 0,\overline{23}$.
Posons $0,23_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{23}{10^{2k}}$ et calculons $0,\overline{1} \times 0,23_n$ pour $n = 1, 2, 3 \ldots$ en utilisant ce qui précède jusqu'à ce que l'*inévitable* se produise :

$$0,\overline{1} \times 0,23_1 = 0,02\overline{5}$$
$$0,\overline{1} \times 0,23_2 = 0,025\,8\overline{1}$$
$$0,\overline{1} \times 0,23_3 = 0,025\,813\overline{6}$$
$$\vdots$$
$$\text{et enfin } 0,\overline{1} \times 0,23_9 = 0,025\,813\,692\,480\,359\,146\overline{9}$$

On en déduit alors que $0,\overline{1} \times 0,23_9 = 0,025\,813\,692\,480\,359\,147$, décimal, puis

$$0,\overline{1} \times 0,23_{18} = 0,025\,813\,692\,480\,359\,147025\,813\,692\,480\,359\,147$$

et enfin, avec un peu d'audace, $0,\overline{1} \times 0,\overline{23} = 0,\overline{025\,813\,692\,480\,359\,147}$.

Le lecteur pourra vérifier qu'en inversant les rôles, c'est à dire en calculant les $0,\overline{23} \times 0,1_n$, on obtient bien $0,\overline{23} \times 0,1_{18} = 0,025\,813\,692\,480\,359\,147$.

Calculer le produit $0,\overline{189} \times 5,\overline{285\,714}$ est amusant et conduit à la recherche de l'inverse.

L'inévitable l'est bien : en procédant ainsi, on aboutit toujours à un produit partiel de période 9 ; le lecteur intéressé par le « pourquoi ? » consultera l'article de Rittaud et Vivier [1] ou cherchera par lui-même. L'intéressant est que ce point peut être démontré sans référence aux rationnels ce qui permet en retour de les construire.

Les radicaux

Lorsque l'on dispose d'une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, il est toujours intéressant d'étudier son éventuelle généralisation aux $\sqrt{m}$, voire aux $\sqrt[n]{m}$ ou même aux nombres algébriques. Pour éviter de parler de racine cubique *a priori* la question peut être abordée sous la forme : « existe-t-il un entier, (resp. un décimal, resp. un rationnel) dont le cube est 1 332 » ? L'intention reste de pouvoir étudier le cas général : existe-t-il un rationnel dont le cube est m ?

Nous avons vu dans la PE551 que la démonstration par le pair et l'impair échoue sur $\sqrt{17}$. Bien sûr, penser multiple de 2 au lieu de pair, et voir 2 comme un nombre premier conduit à une généralisation banale moyennant le théorème de factorisation ou, plus tard, le théorème de Gauss, « gros marteau pour écraser la petite mouche $\sqrt{17}$ » dont la vertu principale est de tuer le problème.

Une piste est de s'intéresser aux démonstrations n'utilisant *a priori* pas de théorème « savant » d'arithmétique des entiers. Ainsi une autre façon de penser pair/impair est de s'intéresser au chiffre des unités en s'appuyant sur les tables de multiplication.

Pour le cas de $\sqrt{17}$, la démonstration par le pair et l'impair bloque sur le cas a et b impairs sous l'hypothèse $a^2 = 17b^2$. Or le chiffre des unités d'un carré d'impair ne peut être que 1, 5 ou 9 et après produit par 17 ne peut être que 3, 5 ou 7, ce qui conduit à a^2 et b^2 multiples impairs de 5 ; et en s'appuyant à nouveau sur les chiffres des unités, a et b sont multiples de 5 ; d'où la contradiction.

Prenons ensuite, dans une variante évitant de manipuler des fractions[2], la « diablerie de Conway » présentée dans la PE551.

La « diablerie de Conway »

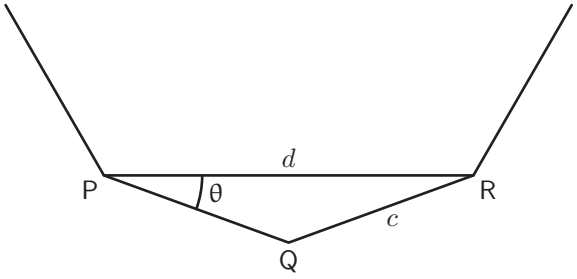
Soit N un entier supérieur à 2. On s'interroge sur l'existence d'un nombre rationnel x dont le carré est N. En s'appuyant sur la définition du collège, il existerait alors un entier *non nul* q tel que $qx = p$, avec p entier. On a alors $q(x - \lfloor x \rfloor) = p - q\lfloor x \rfloor$ donc $q' = q(x - \lfloor x \rfloor) = p^2 - q\lfloor r \rfloor$ est entier ; et de plus $q'x = qN - p\lfloor x \rfloor = q^2N - p\lfloor r \rfloor$ est aussi entier. Enfin, comme $x - \lfloor x \rfloor < 1$, on a $q' < q$. Si $q' \neq 0$, le même travail conduit à $q'' < q'$ entier vérifiant $q''x = p''$ entier. En itérant l'argument, on aboutit nécessairement à la valeur 0. Bien sûr, il serait très élégant de supposer d'emblée q minimal mais Fermat a son mérite. On peut donc supposer que $q' = 0$ donc $x - \lfloor x \rfloor = 0$ autrement dit x est entier. À cet instant, la bonne question[3] est : *mais qu'a-t-on démontré ?*

Passons au cube. Supposons qu'il existe un entier non nul q tel que $qx = p$ avec p entier et $x^3 = N$. On a alors $q' = q(x - \lfloor x \rfloor)$ entier et $q'x = qx^2 - p\lfloor x \rfloor$. Posons $r = qx^2$ et introduisons $r' = q(r - \lfloor r \rfloor)$. r' est entier ainsi que $r'x$ et comme $r' < q$, on retrouve la situation précédente : $r = qx^2$ est entier donc aussi $q'x$ et comme $q' < q$, on en déduit que x est entier.
Démontrer que $\sqrt[n]{N}$ est soit entier, soit irrationnel demande alors une itération finie des arguments précédents (une récurrence finie serait certes élégante mais pas plus probante et pas simple à formuler). Cerise sur le gâteau : généraliser ce qui précède pour démontrer qu'un entier algébrique est soit entier, soit irrationnel.
Une remarque s'impose : l'existence de la partie entière d'un rationnel équivaut à celle de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ ou à l'archimédie de $\mathbb{N}$.

Le cas de l'irrationalité du rapport du côté d'un polygone régulier à la plus petite de ses diagonales, démontrable par anthyphérèse pour le carré, le pentagone et l'hexagone pose la question de la généralisation aux n-gones réguliers. Or le mathématicien canadien E. J. Barbeau a pu démontrer presque élémentairement que cela n'est pas possible [2].

2. Variante dont je n'ai pas retrouvé l'origine.
3. À la suite d'un cours de logique, cette démonstration a été donnée en CPGE et la question ainsi posée a laissé la classe à quia.

Tout repose sur le dénominateur commun des trois exemples « qui marchent » : si c est le côté et d la plus petite diagonale du polygone, on construit un polygone homothétique de côté c' et diagonale d' tels que $d' = d - c$ et $c' = pc + qd$ avec p et q des entiers.



Considérons le triangle PQR formé par trois sommets consécutifs d'un n-gone régulier ($n \geqslant 4$). Supposons qu'il soit possible de construire un n-gone régulier « plus petit » de côté c' et de plus petite diagonale d' vérifiant les relations gagnantes ci-dessus. Posons $\lambda = \dfrac{d}{c} = \dfrac{d'}{c'}$.

Un soupçon de manipulations algébriques fournit l'équation $\lambda^2 - (p+1)\lambda - q = 0$.

Comme $\lambda = 2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, on obtient l'équation en $t = e^{i\theta}$:

$$t^4 - (p+1)t^3 + (2-q)t^2 - (p+1)t + 1 = 0$$

équation à coefficients entiers. Or $t = e^{i\frac{2\pi}{2n}}$ est une racine primitive $2n$-ième de l'unité et donc aussi racine du $2n$-ième polynôme cyclotomique $\Phi_{2n} = \prod_{k \wedge 2n = 1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{2n}}\right)$ de degré $\phi(2n)$, nombre d'entiers entre 1 et $2n$ premiers avec $2n$. Comme Φ_{2n} est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$ (point quand même non trivial), c'est aussi le polynôme minimal de t. On en déduit que, nécessairement, $\phi(2n) \leqslant 4$.

Le calcul des $\phi(m)$ est un problème algorithmique non trivial, mais l'expression

$$\phi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

dans laquelle les p_k sont les diviseurs premiers de m permet de démontrer que, pour $m \geqslant 7$, on a $\phi(m) > \sqrt{m}$; comme $\phi(14) = 6$, nécessairement $2n \leqslant 12$. Un examen des valeurs de ϕ permet d'en déduire $n \in \{4\,;\,5\,;\,6\}$. Pour les propriétés utilisées de l'indicatrice d'Euler ϕ, le lecteur intéressé pourra consulter [3].

Notons qu'il est instructif de démontrer l'expression de $\phi(m)$ dans les cas $s = 1$ puis $s = 2$ ($m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$) par dénombrement direct. Un passage réussi à $s = 3$ mettra sur la piste du joli principe d'inclusion-exclusion.

Remplacer l'égalité $d' = d - c$ par une relation plus générale $d' = ad + bc$ avec a et b entiers n'apporte pas de solutions supplémentaires.

Concaténation de suites de chiffres

Le nombre de Champernowe $C_{10} = 0{,}123\,456\,789\,101\,112\ldots$ cumule les propriétés : il est irrationnel, normal, transcendant et nombre univers. La démonstration d'irrationalité par l'absurde reposant sur l'identification des rationnels et des d.d.i.p. pose des difficultés de mise en forme même à de bons étudiants qui pourtant intuitent bien l'impossibilité d'une période.

Les possibilités de jouer avec des d.d.i. fabriqués par concaténation sont innombrables ; deux exemples classiques :

$$C_{\text{Fib}} = 0{,}112\,358\,132\,134\ldots \text{ et } C_{\text{carre}} = 0{,}149\,162\,536\,496\,481\ldots$$

L'irrationalité de C_{carre} peut être obtenue avec un argument similaire à celui utilisé pour C_{10} : la présence de blocs de « 0 » de longueur arbitrairement grande.

Les d.d.i. ainsi construits ont fait l'objet de nombreuses recherches, en particulier sur des critères d'irrationalité. Par exemple, examinons le critère assez simple dû au mathématicien hongrois Norbert Hegyvàri [4].

Critère d'irrationalité de Hegyvàri

Si (a_n) est une suite strictement croissante d'entiers telle que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge ou, pour le dire plus simplement, $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)$ a pour limite $+\infty$, alors le nombre $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ obtenu par concaténation des écritures décimales des a_n est irrationnel.

Toute l'habileté de la preuve d'Hegyvàri est de se ramener à l'argument utilisé dans la démonstration de l'irrationalité du nombre de Champernowe, argument basé sur l'existence de repunits de longueur arbitrairement grande.

On raisonne par l'absurde. Supposons α rationnel et soit $P = p_1 p_2 \ldots p_s$ un bloc-période du d.d.i. de α, avec $s = 1$ et $P = 9$ pour récupérer les décimaux.

Si les p_i sont tous égaux à 1, définissons C comme le bloc de $2s$ chiffres « 2 » et sinon de $2s$ chiffres « 1 » de sorte que le bloc P n'apparaît pas dans C. Un exercice classique et surprenant est la convergence de la série des inverses des entiers dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 9. Ce résultat se généralise [5] : si C est un bloc quelconque de chiffres et N_C l'ensemble (ordonné) des entiers dont l'écriture décimale ne contient pas ce bloc, alors la série $\sum_{n \in N_C} \frac{1}{n}$ converge ; dit heuristiquement, presque tous les nombres entiers contiennent le bloc considéré ! *A fortiori* la série $\sum_{n \in N_C} \frac{1}{a_n}$ converge aussi.

Considérons alors la somme partielle

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{a_k} = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ a_k \in N_C}} \frac{1}{a_k} + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ a_k \notin N_C}} \frac{1}{a_k}$$

Dans le premier membre, la somme diverge ; dans le deuxième membre, la première somme est majorée donc la seconde ne l'est pas ce qui prouve qu'une infinité de a_k contient le bloc C de longueur $2s$ lesquels ne sauraient donc contenir le bloc P de longueur s ce qui devrait être le cas à partir d'un certain rang.

Ce théorème redémontre aussi le caractère irrationnel du nombre d'Erdös

$$C_E = 0{,}235\,711\,131\,719\ldots,$$

mais ne s'applique ni à C_{Fib} ni à C_{carre}. Mais la communauté travaille et le théorème de Hegyvàri a été généralisé pour englober ces deux cas.

Irrationalité de e et π

La première démonstration de l'irrationalité de e est due à Euler (1737) et repose sur le développement en fraction continue de $\frac{e-1}{2}$ qui est très simple, et qu'il prouve illimité [6]. Une future petite enquête abordera la question de ces développements.

Tout étudiant rencontre probablement la preuve de l'irrationalité de e basée sur la série de l'inverse des factorielles, une fois résolu le problème du calcul de la somme, preuve qui remonte au moins à Joseph Fourier au début du XIXe siècle [7]. Dans sa version séquentielle, le principe, promis à une belle fécondité, est de construire, sous l'hypothèse de rationalité, une suite d'entiers non nuls qui converge vers 0 ou qui décroît strictement.

Ainsi, si R_n est le reste d'indice n de la série $\sum \frac{1}{n\,!}$, la suite qui convient est

$$n\,!\,R_n = n\,!\,e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,!}{k\,!}$$

qui se majore avec un peu d'habileté par $\frac{1}{n}$. L'hypothèse e rationnel rend le membre de droite entier strictement positif pour n assez grand et c'est gagné.

Dans un livre extraordinaire [8], les frères Borwein proposent la démonstration suivante, qui suppose connue la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$:

si $e = \frac{p}{q}$, alors $p\,!\left|\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{q}{p}\right|$ est un entier non nul majoré par $\frac{1}{p+1}$ via une propriété des séries alternées. Brillant.

Une bonne question est de regarder si le même argument fonctionne pour prouver l'irrationalité de e^2, en supposant acquise l'égalité $e^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n\,!}$. La reprise naïve des mêmes arguments achoppe sur la majoration de $n\,!\,R_n \leqslant \frac{2^{n+1}}{n-1}$. La difficulté peut être contournée en observant que, sous l'hypothèse $e^2 = \frac{p}{q}$, le terme $pn\,! - q\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k n\,!}{k\,!}$ non seulement est bien entier mais est divisible par 2^{n-1} si on prend pour n une puissance de 2. On sera amené à rechercher la 2-valuation de $n\,!$:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \cdots$$

égale à 2^{n-1} si n est une puissance de 2 ; voilà un exercice typiquement « taupinal » dont l'utilité se dévoile.

Examiner si l'idée des frères Borwein peut être étendue à e^p mérite une recherche.

L'introduction de suites définies par une intégrale pour démontrer une irrationalité (ou même une transcendance) semble due à Charles Hermite (1873). Dans [9], Ivan Niven a exhibé un principe général pour obtenir l'irrationalité de l'image d'un rationnel par les fonctions trigonométriques, logarithme et exponentielle et de leur fonction réciproque.

La suite $u_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \exp(t)\,\mathrm{d}t$ permet de démontrer que le nombre d'Euler e est irrationnel.

La suite $I_n = \frac{\pi^{2n+1}}{n!} \int_0^1 \left(x - x^2\right)^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$ permet de démontrer que π est irrationnel.

Et la suite $I_n = \frac{q^n}{n!} \int_0^\nu x^n (\nu - x)^n \exp(x)\,\mathrm{d}x$ sous l'hypothèse $\nu = \ln(r) = \frac{p}{q}$ permet de démontrer l'irrationalité de $\ln(r)$ lorsque r est entier (distinct de 1).

Il est bien sûr possible d'énoncer un théorème général épuré [10] :

Théorème

Soit r un réel strictement positif et f_0 une fonction continue sur $[0\,;r]$ et strictement positive sur $]0\,;r[$. On suppose qu'il existe une suite de fonctions $(f_k)_{k\geqslant 1}$ dérivables sur $[0\,;r]$ telle que, pour tout $k \geqslant 1$:

a) $f_k' = f_{k-1}$;
b) $f_k(0)$ et $f_k(r)$ sont entiers.

Alors r est irrationnel !

Algébrique ou non ?

La recherche des solutions entières, décimales ou rationnelles, d'une équation polynomiale est une question méritant d'être étudiée à tous les niveaux, susceptible de rebondir dans toutes sortes de direction avec le plus souvent une bonne dose de directivité.

Ainsi sur l'exemple $x^5 - 5x + 1 = 0$ cité dans la PE551, à une époque ou seul un petit nombre de personnes possédait une calculatrice scientifique (sans solveur d'équation), des élèves de Première S, après avoir (péniblement) éliminé les entiers, se sont questionnés sur les éventuelles racines décimales ; l'effet sur le nombre de décimales de l'exposant 5 — difficilement perçu — a permis d'éliminer les décimaux. Il restait les rationnels. Écrire $x = \frac{p}{q}$ en supposant la fraction irréductible n'est pas une évidence pour tous alors que, quelque temps auparavant, le raisonnement par l'absurde avait été illustré sur $\sqrt{2}$; obtenir l'égalité $p^5 - 5pq^4 + q^5 = 0$ et penser pair/impair, tout cela a eu besoin de fortes sollicitations.

À l'inverse, former une équation polynomiale dont un nombre est solution est une idée qui peut s'avérer féconde. Une belle question concerne l'irrationalité de $\cos(r\pi)$ si r est rationnel $\left(\text{entre 0 et } \frac{1}{2}\right)$ sauf dans les cas exceptionnels $r \in \left\{0\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right\}$.

Cette question demande un accompagnement pour faire le lien avec la recherche des solutions rationnelles d'un polynôme. Comme souvent, étudier des cas particuliers peut permettre de mieux entrer dans le problème.

Prenons $r = \frac{a}{5}$ avec $0 \leqslant a \leqslant 2$. L'idée toute simple est d'observer que $5r = a$ est entier et donc $\cos(5r\pi) = \pm 1$. Or, un logiciel de calcul formel fournit $\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) +$

$5\cos(\theta)$. On est ainsi conduit à rechercher les solutions rationnelles de l'équation $16x^5 - 20x^3 + 5x = \pm 1$ qui sont ± 1 d'ou nécessairement $a = 0$.

Pour étudier le cas général, on montre qu'il existe un polynôme unitaire P_n à coefficients entiers de degré n tel que $2\cos(n\theta) = P_n(2\cos(\theta))$. On peut aussi se lancer dans le calcul explicite de P_n. De plus, le terme constant $P_n(0)$ est soit 0 soit ± 2 selon la parité.

Bon, de la trigonométrie, c'est anachronique en 2024. Pour les nostalgiques, la démonstration se fait par récurrence, en s'appuyant sur une formule de trigonométrie peut-être oubliée : « cos plus cos égale 2 cos cos ». Ensuite, soit n entier (non nul) tel que nr soit entier ; on obtient $P_n(2\cos(r\pi)) = \pm 2$ dont les solutions entières sont 0 ou ± 1 ou ± 2 ; d'où la conclusion.

Reprenons le problème dont la PE551 a fourni une demi-solution :

$$\text{pour } n \geqslant 2,\ \sigma_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} \text{ est irrationnel.}$$

J'ai longtemps cherché, en vain, une solution élémentaire de ce problème. Posé à Michel Demazure en visite à la Réunion comme président de la S.M.F. pour y rencontrer les lycéens, ce dernier avait levé les yeux au plafond, puis, au bout d'une dizaine de secondes, avait fait avec son pouce et son index des allers-retours en disant quelque chose comme : « avec tous les produits de premiers, tu construis une tour d'extensions quadratiques qui aura la bonne dimension ce qui te donnera l'indépendance sur $\mathbb{Q}$ dont tu as besoin »[4]. Mais, au moment où j'allais préciser « élémentaire, Michel », quelques pièces de monnaie sont tombées de sa poche sur le carrelage de la terrasse et il s'est aussitôt penché, non pas pour les ramasser mais pour compter le nombre — anormalement grand — de pièces touchant les joints en se demandant quelle était la probabilité que cela se produise ...

Pour la beauté de la chose, on peut donner les grandes lignes d'une démonstration empruntée à [11] avec un soupçon de théorie des corps.

Tout d'abord comprendre que le problème se ramène à démontrer l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des 2^n nombres $\sqrt{p_1^{\varepsilon_1} \cdots p_n^{\varepsilon_n}}$ où les p_i sont n nombres premiers et $\varepsilon_j \in \{0\,;\,1\}$.

Ensuite, l'idée d'une récurrence vient naturellement en regardant le passage de $n = 1$ à $n = 2$: il suffit de démontrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ donc que la dimension de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt{3}]$ égale 4. Malheureusement, une récurrence sur les n premiers nombres premiers échoue à prouver que $\sqrt{p_{n+1}} \notin \mathbb{Q}\left[\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_n}\right]$ sous l'hypothèse $\dim\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_n}\right]\right) = 2^n$. La communication de Tournés y pourvoie de façon sophistiquée.

La brillante idée de Flanders est de raisonner par récurrence, non pas sur les nombres premiers mais sur une famille arbitraire de n nombres deux à deux *premiers entre eux* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ autrement dit de mettre une quantification universelle sur la famille des a_k dans l'hypothèse de récurrence.

Posons $K_0 = \mathbb{Q}$ et $K_h = K_{h-1}[\sqrt{a_h}]$ pour $h \geqslant 1$. Tout consiste à démontrer que $[K_n : \mathbb{Q}] = 2^n$. Déjà chaque K_h est de degré au plus 2 sur K_{h-1} donc, par multiplicativité des degrés, $[K_n : \mathbb{Q}] \leqslant 2^n$.

4. Dominique Tournès me communiquera plus tard une démonstration due à Géraud Sénizergues.

L'hypothèse de récurrence sera alors : pour toute famille de n entiers deux à deux étrangers, $[K_n : \mathbb{Q}] = 2^n$. Il suffit alors de démontrer que $[K_n : K_{n+1}] = 2$ ou encore que $\sqrt{a_{n+1}} \notin K_n$. En raisonnant par l'absurde, les familles de n éléments $(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_{n+1})$ et $(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n a_{n+1})$ permettent de traiter la relation $\sqrt{a_{n+1}} = x + y\sqrt{a_n}$ avec $x, y \in K_n$ pour aboutir, enfin, à une contradiction.

Un nombre réel ou complexe est dit transcendant s'il n'est pas algébrique. La transcendance de e peut être obtenue par des méthodes accessibles à un étudiant, simplifiant celle d'Hermite. On pourra consulter [12].

Une précision sur les nombres algébriques : parmi les polynômes annulateurs d'un nombre algébrique, il en existe un Π_α de degré minimal dont on peut supposer les coefficients premiers entre eux. Ce degré est appelé le degré de α. Par ailleurs, Π_α est bien sûr irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Liouville a pu exhiber en 1844 le premier nombre transcendant de l'histoire en s'appuyant sur un théorème dit d'approximation rationnelle dans la mesure où il dit quelque chose sur la distance entre α et un rationnel arbitraire.

Théorème d'approximation rationnelle

Si α est algébrique non rationnel de degré d, alors il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de α) telle que

pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ $(q \geqslant 1)$, on a $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^d}$.

C'est clairement une généralisation du cas $d = 1$ énoncé dans la PE551. Supposons donc $d \geqslant 2$.

Soit donc $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q \geqslant 1$. Si $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1$ alors *a fortiori* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^d}$. Supposons alors $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$, donc $\frac{p}{q} \in S = [\alpha - 1\,;\, \alpha + 1]$. Soit Π le polynôme minimal de α.

On a $q^d \Pi\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}^*$ (non nul car Π est irréductible). Donc $q^d \left|\Pi(\alpha) - \Pi\left(\frac{p}{q}\right)\right| = q^d \left|\Pi\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant 1$.

L'inégalité des accroissements finis[5] fournit alors $\left|\Pi(\alpha) - \Pi\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant M_S \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ avec $M_S = \max_{x \in S} |\Pi'(x)| > 0$ indépendant de $\frac{p}{q}$.

Donc $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{M_S q^d}$.

Soit alors $C = \min\left\{1, \frac{1}{M_S}\right\} > 0$. On a bien : $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^d}$.

On en déduit un critère séquentiel de non-algébricité de degré d :

Critère de non-algébricité de degré d

S'il existe une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ telle que $\left(q_n^d \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|\right)$ converge vers 0, alors α n'est pas algébrique de degré d.

5. On peut s'en passer moyennant un peu de travail.

Il est alors possible de démontrer que la constante de Liouville

$$C_L = 0{,}110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,0\ldots$$

(le rang des 1 étant $n!$, $n \geqslant 1$) est un nombre transcendant.

Posons $\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!} = \frac{P_n}{10^{n!}}$; par simple contemplation de l'infinité des décimales, il est presque évident (si, si !) que $\left|C_L - \frac{P_n}{10^{n!}}\right| < 2 \times 10^{-(n+1)!}$.

Soit alors $d \in \mathbb{N}^*$; on a $10^{dn!}\left|C_L - \frac{P_n}{10^{n!}}\right| < 2 \times 10^{(d-n-1)n!}$, majorant qui converge bien vers 0.

Donc C_L n'est pas algébrique de degré d et cela pour tout $d \geqslant 1$.

Kurt Mahler a démontré en 1937 que le nombre de Champernowne est transcendant mais pour cela, d'autres outils que le critère de Liouville sont nécessaires.

Conclusion

Ce qui précède constitue un échantillon de problèmes touchant aux systèmes de nombres et à contenu mathématique plutôt consistant et qui sont susceptibles d'être abordées dans la scolarité en restant, plus ou moins, dans le cadre des programmes. Depuis une quarantaine d'années, l'institution ne cesse de proclamer le rôle fondamental du problème dans l'apprentissage des mathématiques. Il semble pourtant que, dans les manuels, reflet de ce qui se fait et surtout peut se faire dans la classe, les problèmes se déclinent plutôt sous forme d'exercices, éventuellement dits de recherche, occupant une place modeste. La qualification « recherche » indique plus un niveau de difficulté qu'une caractéristique du travail attendu, c'est-à-dire une question dont la réponse est à construire par un travail d'enquête — donc chronophage — plus efficace et profitable lorsqu'il est collectif. Un point important est qu'une bonne question n'appelle pas nécessairement une réponse unique, bonne ou mauvaise, mais des réponses, éventuellement partielles, incomplètes, souvent confuses voire erronées mais fruits d'une recherche ; c'est plus un point de départ qu'un point d'arrivée. Une bonne question est une question génératrice de questions : « un problème générateur de problèmes » disait Alain Bouvier.

Scénarios bien alléchants : encore faut-il que les conditions d'exercice (au sens large) du métier d'enseignant de mathématiques le permettent.

Références

[1] Benoît Rittaud et Laurent Vivier. *Algorithmes des 4 opérations de base sur les rationnels en écritures décimales et construction du corps* ℚ. . 2011.

[2] E. J. Barbeau. « Incommensurability Proofs : A Pattern That Peters Out ». In : *Mathematics Magazine* 6.2 (1983), p. 82-90.

[3] André Warusfel. *Structures Algébriques Finies*. Hachette, 1971.

[4] Norbert Hegyvári. « On Some Irrational Decimal Fractions ». In : *The American Mathematical Monthly* 100.8 (1993), p. 779-780.

[5] Godfrey Hardy et Edward Wright. *Introduction à la théorie des nombres*. Trad. de l'anglais par François Sauvageot. *(An Introduction To The Theory Of Numbers. 5e édition. Oxford University Press, 1980)*. Vuibert, novembre 2007.

[6] Leonhard Euler. *Introduction à l'analyse infinitésimale*. T. 1. disponible sur Gallica : . 1796.

[7] Norbert Verdier. *L'irrationalité de* e *par Janot de Stainville, Liouville et quelques autres*. . 2017.

[8] Jonathan Borwein et Peter Borwein. *Pi and the AGM — A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*. Wiley, 1987.

[9] Ivan Niven. *Irrational numbers*. The Carus Mathematical Monographs. Mathematical Association of America, 1956.

[10] Alan Parks. « π, e, and Other Irrational Numbers ». In : *The American Mathematical Monthly* 03.3 (1986), p. 722-723.

[11] Harley Flanders. « problem 4797 ». In : *The American Mathematical Monthly* 67.2 (1960), p. 188-189.

[12] Michel Waldschmidt. *La démonstration de la transcendance de* e. . 2009.

François Boucher, à la retraite depuis quelques années, s'intéresse encore aux mathématiques et à leur enseignement.

boucherf@free.fr