

Une minoration

Soit P un polynôme unitaire de degré $n \leq 1$ à coefficients réels et soit Q le polynôme défini par homothétie $Q(x) = P(2x)/2$. Soit encore F le polynôme de première espèce de Tchebychev de degré n . Alors $Q-F$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Faisons l'hypothèse que $|P| < 2$ sur $[-2 ; 2]$ soit $|Q| < 1$ sur $[-1 ; 1]$.

Comme F prend successivement et alternativement $n+1$ fois les valeurs 1 et -1 sur $[-1 ; 1]$ il s'en suit que $Q-F$ prend successivement et alternativement $n+1$ fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives sur $[-1 ; 1]$. Donc $Q-F$ s'annule n fois et, vu son degré, est nécessairement nul ; soit $Q=F$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Par conséquent l'hypothèse retenue est fausse. Et donc $|P|$ prend des valeurs supérieures ou égales à 2 sur $[-2 ; 2]$ et par suite possède un maximum supérieur ou égal à 2 sur cet intervalle.