

550-1. Un problème indien.

On demande de déterminer tous les triangles dont les trois côtés sont mesurés par trois entiers consécutifs et dont l'aire est mesurée par un entier.

Solution.

Les côtés du triangle ont une longueur de la forme $a-1, a, a+1$, a entier, $a \geq 3$. Alors la surface S du triangle vérifie la relation

$$\begin{aligned} 16S^2 &= [(a-1) + (a) + (a+1)] \times [-(a-1) + (a) + (a+1)] \\ (1) \quad &\times [(a-1) - (a) + (a+1)] \times [(a-1) + (a) - (a+1)] \\ &= [3a][a+2][a][a-2] = 3a^2(a^2-4); \end{aligned}$$

donc l'entier a est pair et $a = 2x$, x entier, $x \geq 2$. Alors (1) est équivalent à

$$S^2 = 3x^2(x^2 - 1).$$

Si 3 divise x , alors la puissance de 3 qui divise S^2 est impaire, ce qui est absurde. Il en résulte que $\text{pgcd}(3, x) = 1$, donc $3x$ divise S , et $S = 3xy$, y entier, $y \geq 1$. Alors

$$9x^2y^2 = 3x^2(x^2 - 1) \iff x^2 - 3y^2 = 1.$$

Donc $x + y\sqrt{3}$ est une unité de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, et on sait que l'ensemble de ces unités est obtenu de la manière suivante

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad x_n + y_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n;$$

il y a donc une infinité de solutions (on rappelle que $a_n = 2x_n$ et $S_n = 3x_ny_n$). Les trois plus petites sont

$n = 1$	$x_1 = 2$	$y_1 = 1$	côtés = 3, 4, 5,	surface = 6
$n = 2$	$x_2 = 7$	$y_2 = 4$	côtés = 13, 14, 15	surface = 56
$n = 3$	$x_3 = 26$	$y_3 = 15$	côtés = 51, 52, 53	surface = 1170.