

550-2. La tour infernale.

On dispose d'un stock de briques LEGO, 2×4 . On pose une première brique sur le plan de travail, picots au-dessus. Le seul mouvement qui lui est autorisé est le demi-tour sur ce plan. On empile sur cette brique une seconde brique qui est fixée à la première par **au moins deux picots**. On continue, selon la même règle, à empiler les briques restantes les unes sur les autres. Chaque étage ne compte qu'une seule brique, et on monte ainsi une tour rigide de briques de hauteur N .

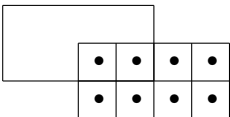
On demande combien de tours rigides de hauteur N on peut ainsi construire. A noter que deux tours sont considérées comme différentes si on ne peut pas les déduire l'une de l'autre par un demi-tour du socle.

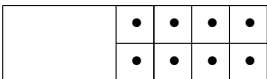
Solution.

On désigne par n le nombre de tours formées du socle et de la première brique ; on rappelle que deux tours qui se déduisent l'une de l'autre par un demi-tour du socle sont considérées comme égales.

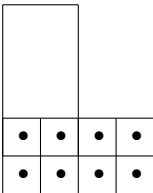
On suppose que le socle est fixé et on désigne par m le nombre de tours formées du socle et de la première brique ; avec cette hypothèse, deux tours qui se déduisent l'une de l'autre par un demi-tour du socle sont considérées comme différentes. La quantité m servira pour le calcul du nombre des tours de plus de deux étages.

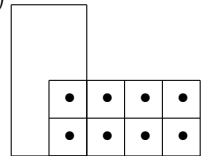
Voici la liste de toutes les configurations obtenues avec le socle (8•) et la première brique dont on a seulement indiqué le contour. Dans chacun des cas, on a dessiné la position de départ, x_1 , de la première brique ; les autres, $x_2, x_3, \dots$ s'obtiennent en décalant d'un picot la brique vers la droite.

A)  $= a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$;

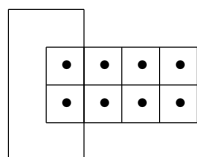
B)  $= b_1, b_2, b_3, b_4 = \text{socle}, b_5 = b_3, b_6 = b_2, b_7 = b_1$;

C) $c_1 = a_5, c_2 = a_4, c_3 = a_3, c_4 = a_2, c_5 = a_1$;

D)  $= d_1, d_2, d_3$;

E)  $= e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$;

F)



$$= f_1, \quad f_2, f_3 \text{ (socle} \cup f_3 = \text{une croix)}, f_4 = f_2, f_5 = f_1 ;$$

G) $g_1 = e_5, g_2 = e_4, g_3 = e_3, g_4 = e_2, g_5 = e_1 ; h_1 = d_3, h_2 = d_2, h_3 = d_1.$

Pour tout $k \geq 1$, on désigne par N_k le nombre de tours comprenant le socle et k étages. On note que seuls b_4 et f_3 donnent une tour globalement invariante par le demi-tour du socle, et on déduit de la liste ci-dessus que

$$N_1 = n = (5 + 4) + (3 + 5 + 3) = 20 \quad \text{et} \quad m = 2 \times 18 + 2 = 38.$$

On calcule N_2 :

On considère une tour T_1 formée du socle et d'une brique t_1 ; on lui rajoute une brique t_2 , accrochée à t_1 , par hypothèse. Que l'ensemble $\text{socle} \cup t_1$ soit invariant ou non par un demi-tour du socle, cela ne change rien, on ne peut pas faire un demi-tour à la brique t_1 toute seule. Pour obtenir toutes les tours à deux étages, on doit donc placer la brique t_2 de $m = 38$ manières ; on obtient ainsi

$$N_2 = 20 \times 38 = 760.$$

Par une récurrence immédiate, on obtient, pour tout $k \geq 1$,

$$N_k = 20 \times 38^{k-1}.$$

Marie-Nicole Gras