

Exercice 550 - 1

Dans le triangle, on note $AB = n$, $AC = n + 1$ et $BC = n + 2$ où n est un entier naturel

On cherche à déterminer n pour que l'aire du triangle soit un entier

D'après le théorème d'Al Kashi on a

$$\cos \hat{A} = \frac{(n+2)^2 - n^2 - (n+1)^2}{-2n(n+1)} = \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - n^2 - 2n - 1}{-2n(n+1)} = \frac{n^2 - 2n - 3}{2n(n+1)} = \frac{(n+1)(n-3)}{2n(n+1)} = \frac{n-3}{2n}$$

On a alors

$$\sin \hat{A} = \sqrt{1 - \left(\frac{n-3}{2n}\right)^2} = \sqrt{\frac{4n^2 - n^2 + 6n - 9}{4n^2}} = \sqrt{\frac{3n^2 + 6n - 9}{4n^2}}$$

$$\text{et } S = \text{Aire}(ABC) = \frac{n(n+1)}{2} \sqrt{\frac{3n^2 + 6n - 9}{4n^2}} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{2n} \times \sqrt{3} \sqrt{(n+3)(n-1)}$$

$$\text{donc } S = \text{Aire}(ABC) = \frac{(n+1)}{4} \sqrt{3} \sqrt{(n+3)(n-1)} \text{ et } S^2 = \frac{3(n+1)^2(n+3)(n-1)}{16}$$

Si n est pair $3(n+1)^2(n+3)(n-1)$ est impair et l'on n'a pas de solution

$$\text{Si } n \text{ est impair on note } n=2p+1 \text{ et on a } S^2 = \frac{3(2p+1+1)^2(2p+1+3)(2p+1-1)}{16}$$

$$S^2 = \frac{3(2p+2)^2(2p+4)(2p)}{16} = 3(p+1)^2(p+2)p$$

Donc $P = 3p(p+2)$ doit être un carré.

$p=0$ fourni une solution $n=1$ et $AB = 1$, $AC = 2$ et $BC = 3$, le triangle ABC est aplati

$p=1$ fourni une autre solution $n=3$ et ABC est le triangle 3,4,5 rectangle et d'aire 6.

On a deux familles de solutions pour p

$$p_n = \frac{1}{2} \left((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right)^2 = \frac{1}{2} \left((7 + 4\sqrt{3})^n + (7 - 4\sqrt{3})^n - 2 \right)$$

$$p'_n = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} (2 + \sqrt{3})^n + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} (2 - \sqrt{3})^n \right)^2 = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} (7 + 4\sqrt{3})^n + \frac{2 - \sqrt{3}}{2} (7 - 4\sqrt{3})^n - 1 \right)$$

On a donc deux familles de solutions pour n

$$u_n = (7 + 4\sqrt{3})^n + (7 - 4\sqrt{3})^n - 1 \text{ et } u'_n = (2 + \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})^n - 1$$

$$\text{Soit } u_n = (2 + \sqrt{3})^{2n} + (2 - \sqrt{3})^{2n} - 1 \text{ et } u'_n = (2 + \sqrt{3})^{2n+1} + (2 - \sqrt{3})^{2n+1} - 1$$

$$\text{En regroupant les deux familles } v_n = (2 + \sqrt{3})^{2(n//2) + n\%2} + (2 - \sqrt{3})^{2(n//2) + n\%2} - 1$$

Donc voici les premières valeurs.

n	Aire du triangle (n,n+1,n+2)
1	0
3	6
13	84
51	1170
193	16296
723	226974
2701	3161340
10083	44031786
37633	613283664
140451	8541939510
524173	118973869476
1956243	1657092233153
7300801	23080317394680
27246963	321467351292366