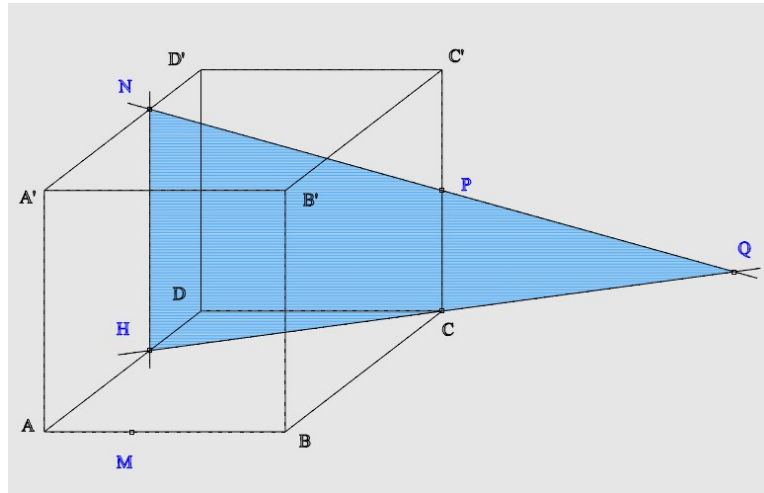


L'intersection d'un cube par un plan défini par trois points situés sur ses arêtes est souvent proposée en exercice en Terminale spécialité maths dans le cas assez simple où deux des points appartiennent à une même face.

Quand ils sont situés comme ici dans trois faces différentes, la construction usuelle consiste à déterminer d'abord l'intersection Q de la droite (NP) avec le plan $(ABCD)$.



On utilise comme plan auxiliaire le plan vertical contenant (NP) .

N se projette orthogonalement sur $(ABCD)$ en H , et P en C .

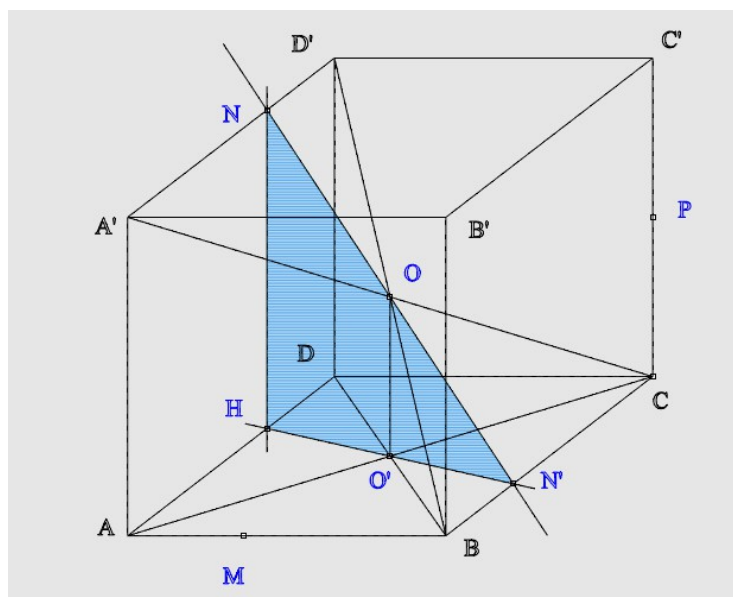
(NP) et (HC) se coupent en Q .

C'est la méthode que j'enseignais, il y a quelques années encore, à mes étudiants en architecture.

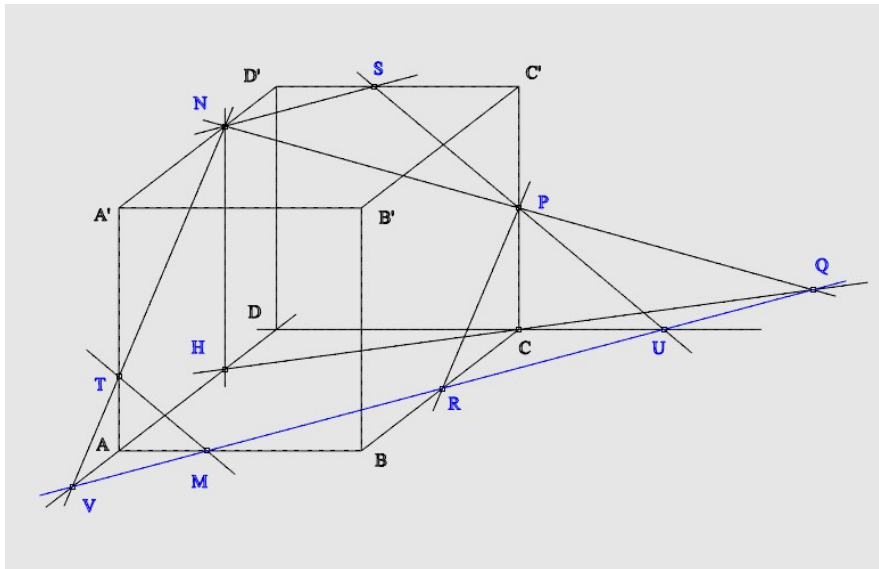
La question est plus compliquée si on se contraint, comme le spécifie l'énoncé, à l'usage de la règle seule.

On ne peut pas alors construire le point H comme nous l'avons fait en traçant par N une parallèle à (AA') .

Mais on peut le faire en utilisant le centre O du cube, intersection de $(A'C')$ et (BD') , et le centre O' de la face $(ABCD)$, intersection de (AC) et (BD) .



(NO) coupe (BC) en N' et $(N'O')$ coupe (AD) en H .



(NP) et (HC) se coupent en Q.

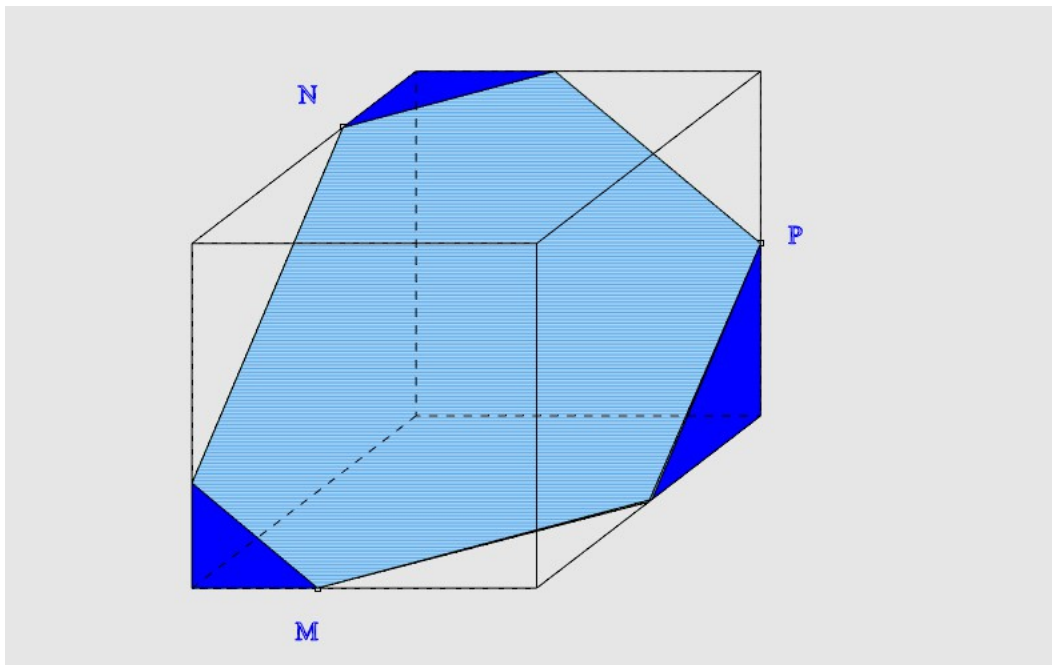
(MQ) est l'intersection des plans (MNP) et (ABCD).

On construit alors les intersections R, S et T du plan (MNP) avec les arêtes (BC), (C'D') et (AA').

(MQ) coupe (BC) en R, (CD) en U et (AD) en V.

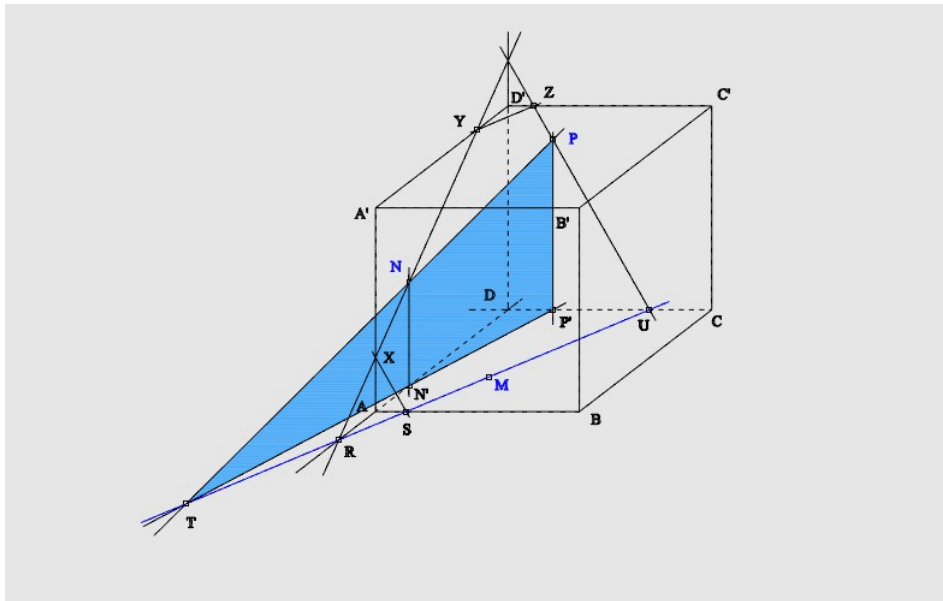
(UP) coupe (C'D') en S et (VN) coupe (AA') en T.

L'intersection du cube par le plan (MNP) est le polygone (MRPSNT).



Complément

On peut aussi se donner les points M, N et P non pas sur des arêtes mais dans des faces du cube. Cela semble compliquer un peu les choses mais la méthode générale est la même.

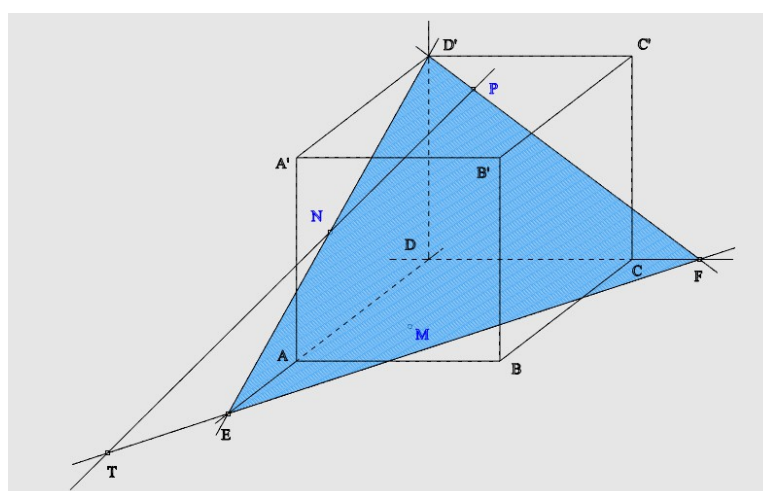


Supposons, sans perdre en généralité, M dans la face (ABCD), N dans la face (ADD'A') et P dans la face (CC'D'D').

Pour déterminer l'intersection T de la droite (PN) et du plan (ABCD), le plus simple est de prendre comme plan auxiliaire le plan vertical contenant (NP) : P se projette sur (ABCD) en P', N en N'. (PN) et (P'N') se coupent en T.

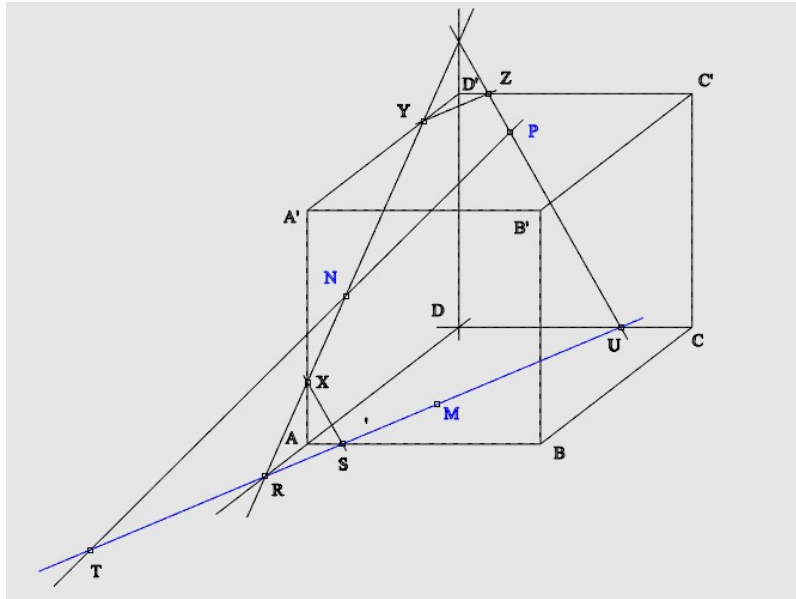
Si on ne dispose que de la règle, on ne peut pas tracer (PP') et (NN') en tant que parallèles à (AA').

On peut alors recourir à un autre plan auxiliaire : le plan (D'NP).



(D'N) coupe (AD) en E. (D'P) coupe (DC) en F. (EF) coupe (NP) en T.

La droite (MT) est donc l'intersection des plans (MNP) et (ABCD).



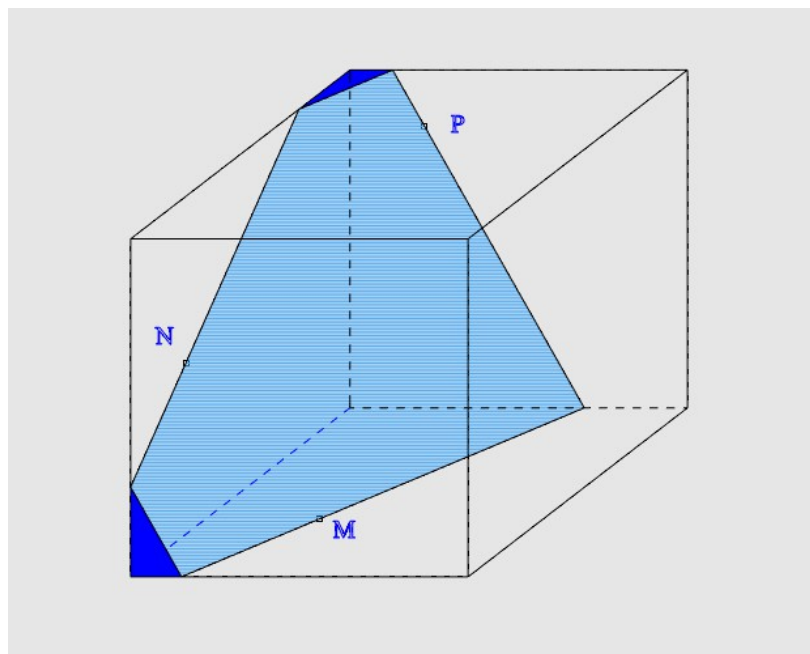
On construit alors les intersections X, Y et Z du plan (MNP) avec les arêtes (AA'), (A'D') et (D'C').

(MT) coupe (AD) en R, (AB) en S et (DC) en U.

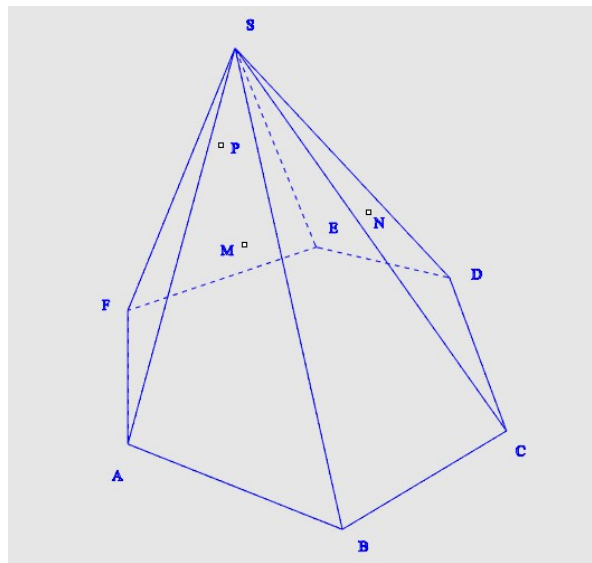
(RN) coupe (AA') en X et (A'D') en Y.

(UP) coupe (C'D') en Z.

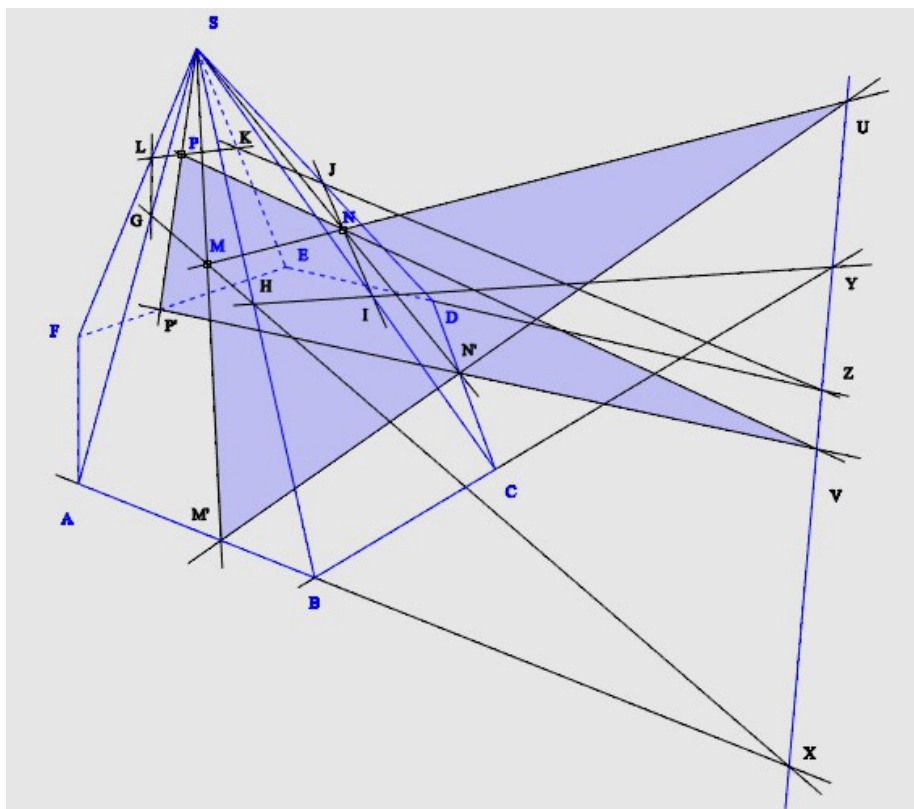
La section du cube par le plan (MNP) est le polygone (SXYZU).



On peut aussi remplacer le cube par une pyramide.
Là, le problème de parallélisme ne se pose pas.



Soit (SABCDEF) une pyramide de sommet S et de base le polygone (ABCDEF).
Le point M est dans la face (SAB), le point N dans la face (SCD) et le point P dans la face (SEF).



Pour construire l'intersection U de la droite (MN) avec la base de la pyramide, on utilise le plan auxiliaire (SMN). (SM) coupe (AB) en M' ; (SN) coupe CD en N' ; (MN) et (M'N') se coupent en U.

Pour construire l'intersection V de la droite (NP) avec la base de la pyramide, on utilise le plan auxiliaire (SNP) : (SP) coupe (EF) en P' ; (PN) et (P'N') se coupent en V.

L'intersection du plan (MNP) avec la base de la pyramide est la droite (UV).

On construit alors les points d'intersection G, H, I, J, K, et L du plan (MNP) avec les arêtes de la pyramide.

(AB) coupe (UV) en X. (MX) coupe (SA) en G et (SB) en H.

(BC) coupe (UV) en Y. (HY) coupe (SC) en I.

(IN) coupe (SD) en J.

(ED) coupe (UV) en Z. (ZJ) coupe (SE) en K.

et (KP) coupe (SF) en L.

L'intersection du plan (MNP) et de la pyramide est le polygone (GHIJKL).

