

550-1 Un problème indien

Les longueurs des côtés (a, b, c) du triangle sont : $(n-1, n, n+1)$, avec $n \geq 2$.

L'inégalité triangulaire : $a + b - c = n - 2 > 0$ implique : $n \geq 3$.

L'aire S du triangle est donnée par la formule de Héron :

$$16 \cdot S^2 = (a + b + c) \cdot (-a + b + c) \cdot (a - b + c) \cdot (a + b - c) = 3 \cdot n^2 \cdot (n^2 - 4)$$

On en déduit que n est pair : $n = 2 \cdot x$, avec $x \geq 2$

La formule de Héron devient : $S^2 = 3 \cdot x^2 \cdot (x^2 - 1)$

On en déduit que $x^2 - 1$ est le triple d'un carré : $x^2 - 1 = 3 \cdot y^2$

C'est une équation de Pell-Fermat.

Les solutions positives sont : (x_k, y_k) , pour $k \in \mathbf{N}$, tels que : $x_k + y_k = (2 + \sqrt{3})^k$



Pour le problème, la première solution pour $k = 0$ est à exclure car $x \geq 2$.

Pour tout $k \geq 1$, $n_k = 2 \cdot x_k$ et l'aire est : $S_k = 3 \cdot x_k \cdot y_k$

Voici les premières solutions :

$k = 1$	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} n = 4 \\ S = 6 \end{cases}$
$k = 2$	$\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} n = 14 \\ S = 84 \end{cases}$
$k = 3$	$\begin{cases} x = 26 \\ y = 15 \end{cases}$	$\begin{cases} n = 52 \\ S = 1170 \end{cases}$
$k = 4$	$\begin{cases} x = 97 \\ y = 56 \end{cases}$	$\begin{cases} n = 194 \\ S = 16296 \end{cases}$
$k = 5$	$\begin{cases} x = 961 \\ y = 209 \end{cases}$	$\begin{cases} n = 722 \\ S = 226974 \end{cases}$
$k = 6$	$\begin{cases} x = 1351 \\ y = 780 \end{cases}$	$\begin{cases} n = 2702 \\ S = 3161340 \end{cases}$
$k = 7$	$\begin{cases} x = 5042 \\ y = 2911 \end{cases}$	$\begin{cases} n = 10084 \\ S = 44031786 \end{cases}$
$k = 8$	$\begin{cases} x = 18812 \\ y = 10864 \end{cases}$	$\begin{cases} n = 37634 \\ S = 613283664 \end{cases}$