

550-3 Une minoration

Pour un polynôme unitaire P , on note : $M(P) = \max_{-2 \leq x \leq 2} |P(x)|$

1) Des variants des polynômes de Tchebychev, de première espèce

On connaît les polynômes de Tchebychev T_n , de première espèce, définis par :
 $\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$

On va étudier les polynômes C_n , définis par : $2 \cdot \cos(n\theta) = C_n(2 \cdot \cos \theta)$

$$C_1(X) = X$$

$$C_2(X) = X^2 - 2 \quad \text{car} \quad 2 \cdot \cos(2\theta) = 4 \cdot \cos^2 \theta - 2$$

$$\text{Pour } n \geq 2, \quad 2 \cdot \cos(n+2)\theta + 2 \cdot \cos(n\theta) = 4 \cdot \cos(n+1)\theta \cdot \cos \theta$$

$$\text{On en déduit la relation de récurrence :} \quad C_{n+2}(X) + C_n(X) = X \cdot C_{n+1}(X)$$

Cette relation montre par récurrence que les polynômes C_n sont unitaires, de degré n .

$$\text{Les premières valeurs sont :} \quad \begin{cases} C_1(X) = X \\ C_2(X) = X^2 - 2 \\ C_3(X) = X^3 - 3 \cdot X \\ C_4(X) = X^4 - 4 \cdot X^2 + 2 \\ C_5(X) = X^5 - 5 \cdot X^3 + 5 \cdot X \\ C_6(X) = X^6 - 6 \cdot X^4 + 9 \cdot X^2 - 2 \end{cases}$$

Pour ces polynômes :

$$M(C_n) = \max_{-2 \leq x \leq 2} |C_n(x)| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |C_n(2 \cos \theta)| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |2 \cdot \cos(n\theta)| = 2$$

2) Minoration de $M(P)$, pour les polynômes P unitaires

On va montrer que 2 est la plus petite valeur possible pour $M(P)$, avec P unitaire.

Supposons par l'absurde l'existence d'un polynôme unitaire P tel que $M(P) < 2$.

On considère les valeurs : $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $0 \leq k \leq n$

$$C_n(x_0) = 2 > P(x_0), \quad C_n(x_1) = -2 < P(x_1), \quad C_n(x_2) = 2 > P(x_2), \quad C_n(x_3) = -2 < P(x_3), \quad \text{etc ...}$$

Le polynôme $C_n - P$ est de degré $n-1$ et il admet n racines distinctes car il change de signe dans chacun des n intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, pour $0 \leq k \leq n-1$.

C'est une contradiction !