Le bulletin de l'APMEP - Nº 553

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Juillet, août, septembre 2024

Accompagnement des élèves

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2024-2025 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Audrey DUGUE, Nada DRAGOVIC, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Éric ASTOUL, Pol LE GALL*.

Équipe TEXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Olivier GÉRARD, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Nicolas PETIOT, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : septembre 2024. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Les fractions, c'est pas du gâteau !

Comment enseigner les fractions à l'école ? Comment les rendre accessibles pour les élèves ? Guillaume Assali partage son expérience dans une classe très hétérogène de REP en cycle 3.

Guillaume Assali

Le travail dont cet article est le fruit a été coprésenté par Serge Petit[1] et moi-même lors d'une communication aux Journées nationales de l'APMEP à Jonzac en 2022 et lors du colloque de la COPIRELEM de 2023 à Marseille. Les actes de ce colloque, à paraître, proposeront une vision approfondie de cette publication.

Dans le cadre de la formation continue organisée par ma circonscription (Arles, 13), j'ai assisté, il y a trois ans, à une conférence à deux voix donnée par Serge Petit et Annie Camenisch[2] à propos de l'importance du langage dans l'enseignement des mathématiques.

Une malice de Serge Petit : « *… de la même manière, on n'enseigne pas les fractions avec des parts de gâteaux* » a ébranlé mes rares certitudes, à la fois sur les représentations des fractions, sur leur sens et sur leur enseignement. En effet, dans la méthode que j'utilisais à cette époque, on n'utilisait pas de parts de gâteaux, certes, mais des parts de pizzas ! Comme je les avais moi-même utilisées en tant qu'élève et cela semblait très bien fonctionner… du moins jusqu'au difficile passage de la manipulation à l'abstraction dans l'apprentissage. Comment en effet positionner des parts de pizza sur une droite graduée ? Le sujet était assez sensible pour que notre constellation[3] décide de le choisir comme objet de travail tout au long de l'année. Je me suis alors dit qu'il y avait là une occasion à saisir. À la pause, j'ai demandé à Serge Petit d'expliquer sa malice. Il m'a répondu que le sujet méritait plus qu'un aparté et m'a donné son adresse électronique. Cela fait trois ans qu'on en discute…

Notre parti pris : le retour aux mathématiques

Notre approche vise à donner de solides bases aux élèves concernant la compréhension des fractions en évitant si possible d'induire des erreurs persistantes concernant les calculs sur les fractions (additionner les dénominateurs ainsi que les numérateurs pour additionner deux fractions) et les transformations d'écritures fractionnaires en écritures dites « à virgule » pour les fractions décimales $\left(\frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ par exemple}\right)$ ou la comparaison des décimaux (qui produit souvent des relations comme $1{,}4 < 1{,}34$), etc.

Pour tenter de rendre le sujet plus accessible aux élèves, Serge Petit m'a suggéré une progression et des activités qui se sont révélées concrètes et stimulantes, permettant aux élèves de manipuler, d'expérimenter et d'approcher visuellement les concepts mathématiques liés aux fractions à partir de situations-problèmes permettant de faire émerger l'insuffisance des nombres entiers. Il fallait que la situation ait du sens et qu'elle mette en jeu des compétences dans lesquelles les élèves se retrouvent. C'est le cas de la mesure des longueurs et de la multiplication, pratiquées abondamment au cycle 2. Ce fut notre point d'appui.

1. Formateur en mathématiques retraité de l'IUFM d'Alsace. Université de Strasbourg.
2. Maître de conférences en sciences du langage à l'INSPÉ de Strasbourg. Université de Strasbourg.
3. Dispositif de formation continue.

Il s'agit donc de partir des acquis des élèves afin que ceux-ci puissent relier les savoirs nouveaux aux savoirs acquis qui sont retravaillés et renforcés par la même occasion. Chaque séance est pensée en fonction des productions des élèves lors de la séance précédente. Ce faisant, je rejoins les préconisations du collectif « Didactique pour enseigner » publiées dans leur ouvrage éponyme en 2019 [1]. Cette démarche permet à tous les élèves de travailler autour de la même situation et de faire progresser le collectif à partir de ce que les élèves produisent.

Les acquis des élèves en fin de séquence montrent que, en ce qui concerne les fractions, le niveau de la classe est homogène — de plus à un bon niveau —, ce qui me conforte dans mes choix.

Élaboration d'une séquence d'apprentissage

La séquence d'apprentissage que je propose suit, du point de vue pédagogique, les phases de l'apprentissage décrites par Sylvain Connac [2] en plaçant l'élève au centre du processus d'acquisition du savoir.

Point d'entrée dans les fractions

Faire chercher aux élèves la longueur d'un segment obtenu en découpant en sept segments isométriques un segment d'un décimètre, puis en deux, trois, quatre, cinq, huit et neuf.
Des changements d'unités successifs ne permettent pas de trouver certains des nombres cherchés, d'où la nécessité de nouveaux nombres.

L'élève, qui se trouve initialement dans une phase « d'incompétence inconsciente » (il ne sait pas qu'il existe des nombres entre 0 et 1 ni même qu'il existe une unité de mesure plus petite que le millimètre, étapes 1 et 2 de la séquence), va, à partir des situations problèmes proposées, se confronter à ses propres frustrations générées par la phase « d'incompréhension consciente », illustrée ici dans les étapes 2 et 3, durant lesquelles l'élève prend conscience de l'insuffisance des nombres entiers, seuls nombres qu'il connaît. C'est lors de cette phase qu'est mis en forme le savoir (étape 3) : introduction des fractions, nouveaux nombres, et de leurs désignations en mathématiques (ex. : $\frac{1}{7}$) et en langue naturelle (ex. : un septième), et surtout de la relation fondamentale qui les définit (ex. : $1 = 7 \times \frac{1}{7}$). Et comme dirait Jean Toromanoff [3, p. 75] : *« un septième, il en faut sept pour faire un »*).

À force de manipulations (souvent en groupe), d'explicitations (souvent entre pairs), les élèves parviennent enfin à la phase de « compétence consciente ». C'est ainsi que, grâce à ces nouveaux savoirs, les élèves, en situation de recherche, ont pu, par la manipulation, approcher (établir ?) des égalités telles que $4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7}$ (étape 5), après qu'ont été construits les nombres désignés par les écritures $\frac{4}{3}$ et $\frac{4}{7}$ comme exprimant la mesure des segments obtenus en découpant un segment de longueur 4 unités, respectivement en trois et en sept, nombres qui vérifient les égalités $3 \times \frac{4}{3} = 4$ et $7 \times \frac{4}{7} = 4$. Ces égalités ($4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ et $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7}$) ne relèvent pas de l'évidence car, alors que les deux membres de chaque égalité désignent le même nombre, ils ont de fait des significations différentes [4] (voir *infra* étape 5).

Enfin, les élèves développent une intuition mathématique qui les conduit naturellement vers la dernière phase de développement du savoir, la phase de « compétence inconsciente ». Dans cette phase, l'élève, expert, transfère ses savoirs pour résoudre des problèmes complexes comme utiliser les fractions pour rendre compte d'égalités et de partages de grandeurs (étapes 6A et 6B).

En lien avec les sciences cognitives, ces phases incluent des rituels quasi quotidiens afin d'ancrer dans le temps les connaissances des élèves et leur éviter de tomber dans une cinquième phase du cycle de l'apprentissage que je pourrais nommer *« l'inconscience de la perte de compétence »*.

En trois ans, la séquence que je propose aux élèves a évolué. Ainsi, au vu des difficultés rencontrées par les élèves la première année, des séances dites « préalables » ont été ajoutées. Elles n'avaient pas été prévues et ont fait, à cette époque, l'objet de séances que l'on pourrait qualifier de « décrochées » en ce qui concerne la progression, alors qu'elles en font maintenant partie intégrante (jusqu'au prochain changement) afin de prévenir certaines situations de blocage.

Les trois séances maintenant intégrées portent :

- la première sur le fait que mesurer signifie encadrer,
- la deuxième sur le sens des éléments de mots *déci-*, *centi-*, *milli-*,
- la troisième sur la possibilité de mesurer avec une règle cassée à laquelle il manque une partie comportant l'origine (donc sur le sens de la droite graduée).

Séance préalable 1 : encadrer des mesures de longueurs

Objectif. Vérifier et approfondir les acquis des élèves tout en leur faisant percevoir la nécessité d'encadrer des mesures de longueurs de segments. Si jusqu'alors mesurer, c'était donner une valeur dite exacte, désormais, mesurer devient une activité d'encadrement.

Activité. Les élèves disposent d'une baguette de 1 m, puis d'un bâton de 1 dm et enfin d'un cube de 1 cm de côté pour mesurer la longueur du préau.

Figure 1. *Frustré par le manque de précision, un groupe a trouvé qu'un mètre est égal à 5 carreaux. Ainsi, dès la première phase, ils ont pu dire que le préau mesure entre 7 m et 40 cm et 7 m et 60 cm.*

Enseignement. Les élèves s'aperçoivent que le mètre n'est pas assez précis pour mesurer le préau qui mesure entre 7 et 8 mètres. Ils essaient successivement avec des unités plus petites pour finalement conclure qu'afin d'être précis, il faut encadrer les mesures des longueurs, ce qui constitue une rupture par rapport aux pratiques précédentes.

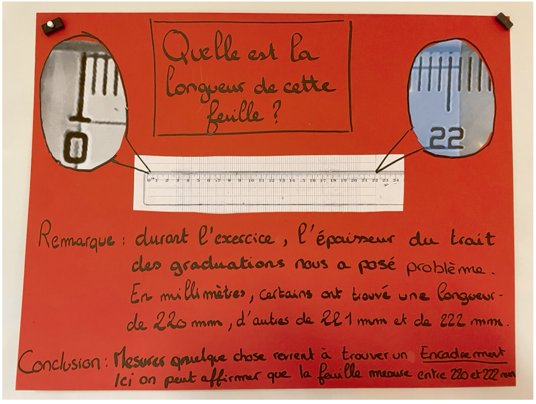


Figure 2. *Du préau à la feuille, nous avons éprouvé le besoin d'encadrer des longueurs afin d'être précis. Sortez les loupes !*

Étape 1 : partage d'une ficelle en segments isométriques

Après cette séance préalable, je distribue une ficelle par groupe d'élèves (les longueurs sont différentes) et je demande aux élèves de la découper en sept bouts de ficelle de même longueur. Cette activité se déroule sous le préau. Elle prépare les élèves à modéliser la situation vécue en découpant ultérieurement un segment de 1 dm de longueur (représentant la ficelle) en sept segments isométriques (chacun représente un morceau de ficelle obtenu après découpage en sept bouts de même longueur).

Objectif. S'engager dans la démarche de « fractionner », manipuler, expérimenter, émettre des conjectures sur une manière de découper correctement. Après avoir éprouvé différentes stratégies, les élèves doivent se rendre compte que certaines d'entre elles (comme le pliage) laissent une trop grande place au hasard (« *maître, il reste toujours un bout !* »). Les lignes parallèles formées par le carrelage permettront de résoudre (à peu de chose près) le problème en vrai, et seront modélisées par le guide-âne [5] en classe.

Activité. Sous un préau de l'école, les élèves manipulent en groupes pour partager une ficelle de plusieurs mètres en sept segments de même longueur. Les élèves, tous très investis, cherchent et tentent notamment de trouver une longueur qui serait égale au septième de celle de la ficelle (banc, carrelages, radiateur, etc.). Ils se rendent compte que les mathématiques ne sont en aucun cas affaire de hasard (les tentatives de pliage en 7 le montrent bien).

Enseignement. Les élèves doivent tester, essayer plusieurs pistes de résolution en mobilisant des procédures déjà rencontrées et en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle. Le guide-âne est introduit grâce au carrelage, ce qui permet aux élèves une manipulation simplifiée et facilitera par la suite sa prise en main dans la phase de modélisation.

Étape 2 : utilisation du guide-âne pour découper une ficelle puis un segment d'un décimètre en segments isométriques

Objectif. Modéliser par la géométrie des situations (la ficelle étirée devient un segment de droite, les lignes du carrelage deviennent un faisceau de droites parallèles équidistantes).

Activité. Les élèves utilisent des carrelages comme guide-âne pour découper une ficelle en segments égaux. Ils passent ensuite de la ficelle à la feuille, du carrelage au guide-âne, d'une activité de manipulation (étape 1) au temps de la modélisation qui se fait en classe où on modélise la ficelle par un segment, le guide-âne constitué des lignes du carrelage par un faisceau de droites parallèles équidistantes.

Enseignement. Les élèves apprennent à utiliser des outils concrets pour approcher les découpages en segments isométriques.

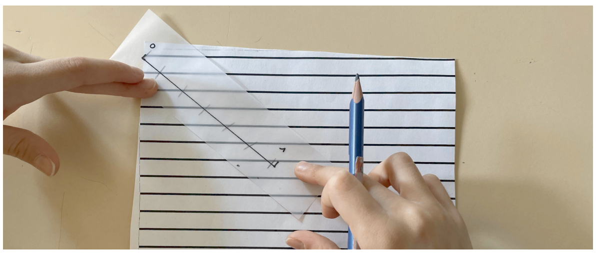
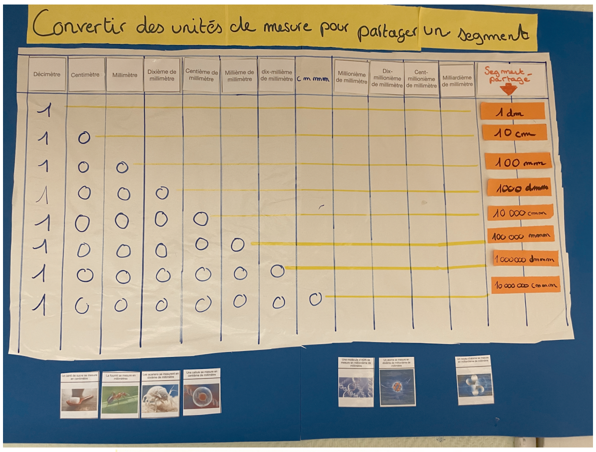


Figure 3. *Si les élèves comprennent assez facilement l'utilité du guide-âne, son utilisation est plus délicate et demande un entraînement quotidien.*

Séance préalable 2 : étude langagière



décimètre	dixième de mètre
centimètre	centième de mètre
millimètre	millième de mètre

Complète

1.déci- veut dire dixième. Il faut dix décimètres pour faire un mètre.

2.centi- veut dire centième. Il faut cent centimètres pour faire un mètre.

3.milli- veut dire millième. Il faut mille millimètres pour faire un mètre.

A ton avis :

Il faut dix centimètres pour faire un décimètre.

Il faut cent millimètres pour faire un décimètre.

Figure 4. *Tableau de conversion construit par les élèves grâce à la fiche sur le lexique. Il nous sera très utile dans l'étape suivante !*

Objectif. Travailler le langage afin de mieux comprendre les éléments de mots *déci-*, *centi-*, *milli-*.

Activité. Suite aux exercices d'encadrement de longueurs, les élèves se sont demandé ce qui est plus petit que le millimètre. Cette activité propose aux élèves de trouver la réponse grâce à une étude lexicale.

Enseignement. La compréhension de la langue nous ouvre les portes de nouvelles unités de mesure telle que dixième de millimètre ou même milliardième de millimètre et ainsi nous pouvons prolonger nos encadrements vers l'infiniment petit.

Étape 3 : introduire les fractions

Objectif. Introduire les fractions pour « *pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment* *pour mesurer des longueurs », ainsi que les programmes de 2018 le préconisent.*

Activité. Les élèves utilisent un segment de 1 dm qu'ils partagent en sept segments isométriques. Ils doivent trouver la longueur de chacun des segments obtenus. On nomme L la longueur de chacun de ces segments.

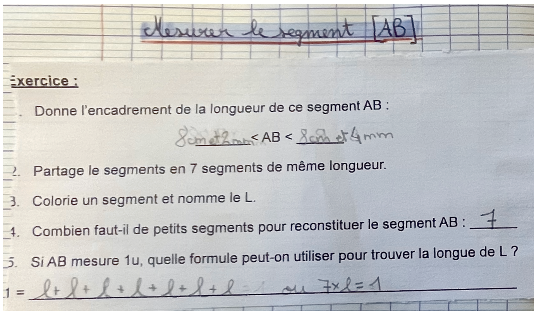


Figure 5. *Trace écrite dans un cahier d'élève.*

Il est évident pour tous les élèves que

$$L+L+L+L+L+L+L=1\,\text{dm},$$

soit aussi $7\times L = 1$ dm. Hélas, ni 1 cm, ni 2 cm ne conviennent car 7×1 cm $= 7$ cm (trop petit) et 7×2 cm $= 14$ cm (trop grand). Les élèves calculent 7×14 mm, ils obtiennent 98 mm, trop petit ! Ils calculent 7×15 mm et obtiennent 105 mm, trop grand… Un autre encadrement suit alors après un changement d'unité de mesure, toujours en ne manipulant que des nombres entiers !

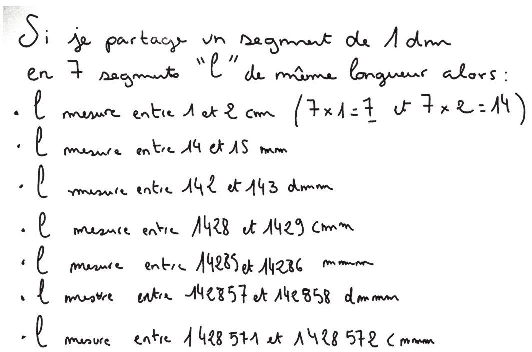


Figure 6. *Récapitulatif des recherches des groupes au tableau.*

En groupe, les élèves reprennent cette démarche en découpant le segment de 1 dm en deux, trois, quatre, cinq, six, huit et neuf segments isométriques. Chaque groupe avait une valeur où tout allait bien (deux, quatre, cinq, huit) et une autre pour laquelle un encadrement suivait toujours un encadrement précédent… trois, six, sept, neuf.

Enseignement. Les élèves parviennent parfois à trouver la valeur de L, mais parfois non.

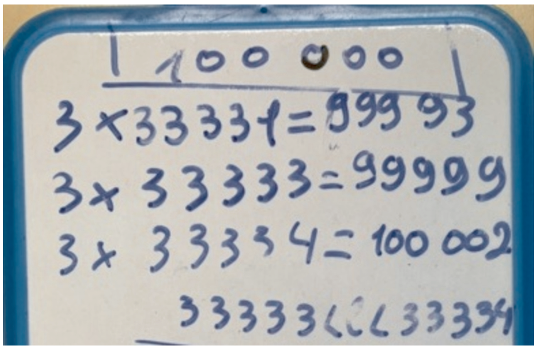


Figure 7. *Recherches d'un élève.*

Certains persistent mais au bout d'un moment des élèves s'insurgent. *« Ça ne s'arrête jamais !!! », « on n'y arrive pas ! »*
Ce n'est qu'à ce moment-là que j'introduis les fractions pour pallier l'insuffisance des nombres entiers.

Je dis alors aux élèves qu'ils ont raison, qu'ils n'y arriveront effectivement pas avec les nombres qu'ils connaissent (les entiers naturels), même s'ils prennent des unités de plus en plus petites, et que les mathématiciens ont inventé des nouveaux nombres que l'on appelle des « fractions[4] ».

J'introduis alors la notation $\frac{1}{7}$, et **je dis aux élèves que cette écriture se lit « un septième »** (et surtout pas « un sur sept », expression qui relève du langage usuel). Nous dirons aussi *un unième, un deuxième, un troisième, un quatrième* pour insister sur le sens d'un des deux suffixes *-ième* (celui indiquant un partage régulier et pas un ordre).

D'ailleurs, bon nombre d'élèves ne connaissaient ni le mot *tiers*, ni le mot *quart*.

Je fais alors écrire par les élèves la relation fondamentale[5] des fractions, à savoir $7\times\frac{1}{7}=1$.

4. Les fractions sont des nombres et pas des écritures de nombres sous forme dite *fractionnaire*. Elles ont donc de fait une infinité de désignations possibles.

5. C'est ainsi que nous nommons la relation $n\times\frac{1}{n}=1$ pour tout entier n différent de 0.

Cette relation fondamentale est ensuite écrite pour chacun des découpages.

> **J'insiste**, comme je l'ai fait par ailleurs à propos des nombres entiers, **en disant que $\frac{1}{7}$ n'est pas un nombre, mais une écriture d'un nombre** ; que $\frac{1}{7}$ n'est pas une fraction, mais une des nombreuses écritures d'une fraction.

Notre objectif est maintenant de placer, non plus des parts de pizzas, mais des fractions sur une demi-droite graduée. Nous dirons couramment « droite graduée ».

Séance préalable 3 : la droite graduée

La nécessité de cette séance m'a été inspirée par le fait que j'ai vu des élèves placer sur la droite graduée les fractions suivantes, dans l'ordre indiqué : 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 1, ou bien encore, les fractions sont placées selon la valeur de leur dénominateur (figure 8).

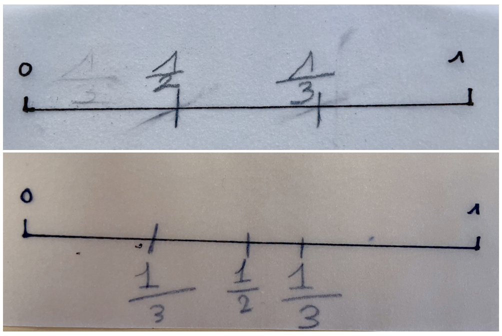


Figure 8. *Travaux d'élèves avant le travail sur le sens de la droite graduée.*

Objectif. Comprendre la construction d'une droite graduée afin d'éviter des erreurs comme celle déjà signalée où $\frac{1}{3}$ est une fois à sa place et une fois à la place de $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

Activité. À partir d'une règle cassée dont il manque le 0, les élèves doivent mesurer la longueur d'un segment. Ils ont à déplacer une bande de carton le long du mètre jaune de la classe pour en calculer la longueur.

Enseignement. La différence entre les nombres indiqués à l'extrémité du segment et à son origine est constante et le calcul le plus simple est obtenu quand l'origine correspond au point marqué 0. Ainsi, chaque graduation d'une règle indique la longueur du segment dont les extrémités sont l'origine et le point marqué, c'est-à-dire la distance de ce point à l'origine.

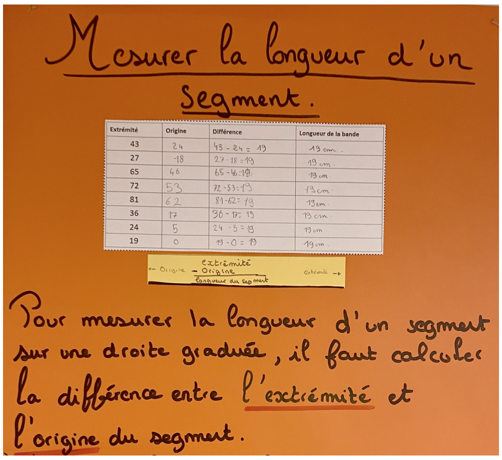


Figure 9. *Affichage en classe.*

Étape 4 : représenter les fractions sur la demi-droite graduée, les comparer

Objectif. Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux.

Activité. Placer deux fractions désignées par une écriture de la forme $\frac{1}{n}$ sur une droite graduée pour les comparer.

Enseignement. Comprendre qu'une fraction est un nombre et que, comme tout nombre, elle peut représenter une position. Suite à ce travail, les élèves ont donné plus de sens au positionnement des fractions sur une droite graduée.

Étape 5 : établir des égalités telles que $4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ et $4\times\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$

La fraction désignée par $\frac{4}{3}$ (comme celle désignée par $\frac{4}{7}$) a été préalablement construite comme étant le nombre qui, multiplié par 3 donne 4 (il mesure la longueur de chacun des segments isométriques obtenus après découpage en trois segments isométriques d'un segment de longueur 4 unités).

La signification de $4\times\frac{1}{3}$ est la mesure de la longueur d'un segment obtenu par la mise bout à bout de quatre segments de longueur $\frac{1}{3}$.

L’écriture $4 \times \frac{1}{3}$ n’a donc pas la même signification que celle de $\frac{4}{3}$ [4].
Ces égalités doivent donc être construites avec les élèves. Nous avons choisi de les construire, encore une fois, avec des bouts de ficelle.

Objectif. Établir les égalités ci-dessus par la manipulation.
Activité. Chaque groupe dispose d’une ficelle unité ainsi que d’une ficelle dont la longueur est quatre unités. Les unités de longueur sont différentes pour chaque groupe afin de rendre compte que les relations à montrer sont indépendantes du choix de l’unité. Il s’agit de construire une ficelle de longueur $\frac{4}{3}$ u. La ficelle de 4 u est découpée en trois par le carrelage guide-âne. Chacun des segments obtenus mesure $\frac{4}{3}$ u, aux approximations de découpage près. On découpe en trois segments isométriques une ficelle dont la longueur est l’unité et on vérifie par manipulation que l’on a bien $4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.
Enseignement. Comprendre qu’une fraction n’est pas une écriture, mais un nombre et que, comme tout nombre, il peut s’écrire sous différentes formes.

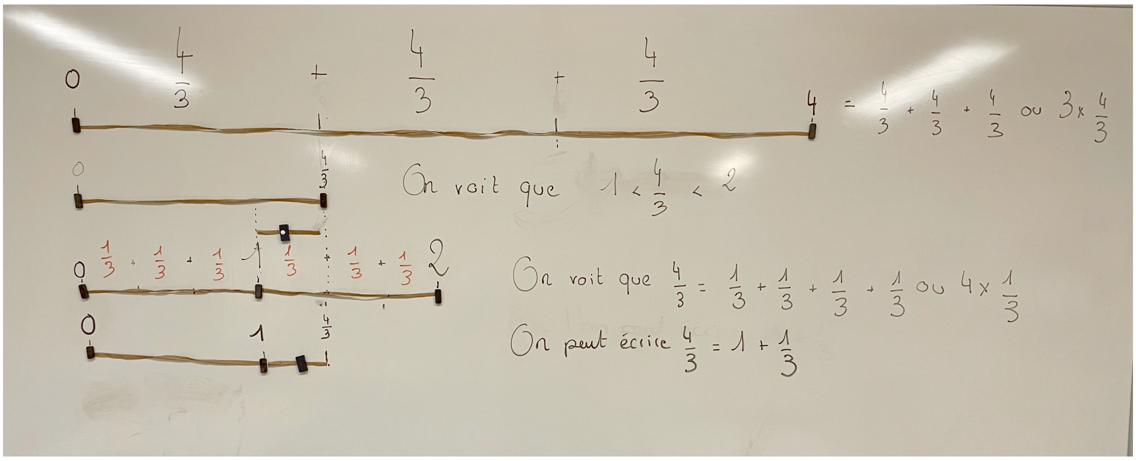


Figure 10. *Mise en commun des recherches des élèves.*

Étape 6 : utiliser les fractions pour rendre compte de partages de grandeurs

Jusqu’à cette étape, les fractions n’ont été introduites et travaillées que

- dans le cas de la mesure des grandeurs ; or ces nombres peuvent servir à travailler pour exprimer des « parties » de collections d’objets ;
- dans le cas de la mesure des grandeurs, aspect continu ; passer du continu au discret (cardinal de collections d’objets distincts) ouvre d’autres perspectives quant à l’utilisation des fractions et va permettre d’anticiper des erreurs potentielles.

Objectif. Renforcer le sens des fractions (et non pas enseigner la somme de deux fractions). Nous souhaitons en effet inhiber dans l’œuf une erreur couramment commise du type $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{9}$ ou $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{8}$).

Situation A : établir des égalités à partir de jetons.

Activité. Une valeur est donnée à un jeton, ici $\frac{1}{12}$. Les élèves ont tout d’abord pour objectif de reconstituer une unité. Ils justifient le choix de prendre douze jetons par la propriété fondamentale des fractions $12 \times \frac{1}{12} = 1$. Il leur est ensuite demandé de représenter $\frac{1}{3}$ puis $\frac{1}{4}$ avec les jetons. Nous pouvons voir dans la figure 11 que les élèves isolent 4 jetons et concluent que $\frac{4}{12}$ représente aussi $\frac{1}{3}$, que $\frac{3}{12}$ représente aussi $\frac{1}{4}$ et que $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

est aussi représenté par $\frac{7}{12}$. Les élèves écrivent (figure 12), sans enseignement sur la somme de fractions, que $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

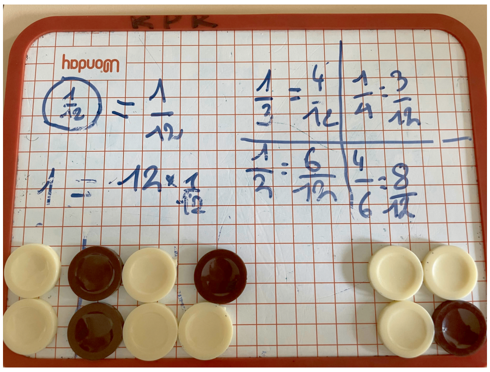


Figure 11. *L’élève justifie son choix de douze jetons par l’égalité fondamentale puis découvre des égalités.*

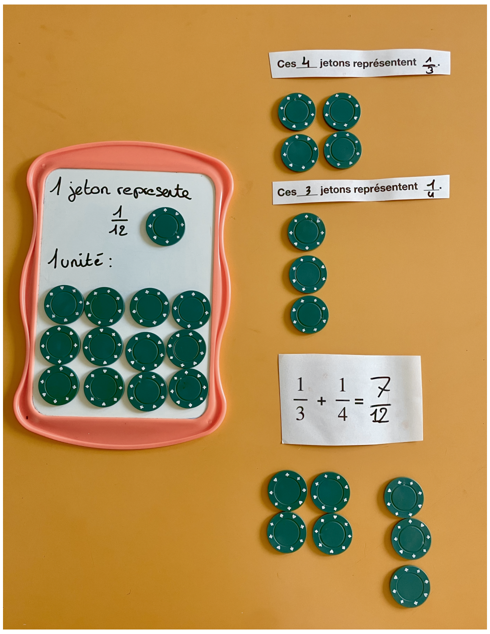


Figure 12. *L’élève calcule la somme de deux fractions.*

De tels résultats étant établis et largement fréquentés, il nous semble qu’au moment où les élèves devront effectuer des sommes de fractions, ils seront moins tentés de produire des égalités comme $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$, égalités apparemment si vraies avec les parts de pizzas ! En effet, manger une part sur trois parts de pizza puis manger une part sur quatre parts de pizza a bien pour résultat d’avoir (quel gourmand !) mangé deux parts sur sept parts de pizzas. Les activités que nous proposons visent à éviter les égalités induites par les parts de gâteaux ou de pizzas.

De plus (figure 12), cerise sur le gâteau si j’ose me le permettre, munis de ce matériel, certains groupes ou élèves seuls proposent spontanément des égalités comme $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$, etc. découvrant ainsi par eux-mêmes une autre propriété des écritures fractionnaires, propriété qu’ils ne se priveront pas d’utiliser spontanément plus tard.

Situation B : Le problème du chef de gare de Colmar

Activité. Nous appuyant sur les acquis des élèves sur les fractions et la lecture de l’heure, nous avons proposé un défi aux élèves qui, en groupes, ont dû le résoudre et expliquer leur stratégie.
Les groupes disposaient tous d’une horloge plastifiée et de soixante trombones.

Énoncé du problème

Comme chacun sait, de nombreux trains sont en retard ou même supprimés. Le chef de gare de Colmar regarde l’horloge chaque fois qu’un train est en retard et s’amuse à décomposer 1 en sommes de fractions toutes différentes.
Très fier de lui, il a trouvé $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ *en attendant le train Bâle-Strasbourg et* $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ *puis* $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ *en attendant le train Strasbourg-Bâle.*
Devine comment il a fait. S’est-il trompé ?
Je suis certain que tu peux faire mieux que lui et décomposer 1 en quatre fractions différentes, en cinq fractions différentes, et pourquoi pas en beaucoup plus de fractions différentes.

Enseignement. Les élèves font le lien entre fractionner et diviser, et explorent diverses méthodes pour travailler avec les fractions, notamment l’analogie : notre unité, c’est une heure, que l’on peut aussi représenter par soixante trombones. $\frac{1}{6} + \frac{2}{12} + \frac{4}{24}$ représente[6] 10 min + 10 min + 10 min, c’est une demi-heure ; et de poursuivre en exprimant sous forme de somme de fractions une autre demi-heure…

6. En fait, certains élèves proposent plusieurs désignations différentes de la même fraction et des fractions différentes. Mais qu’importe. Ils font des maths !

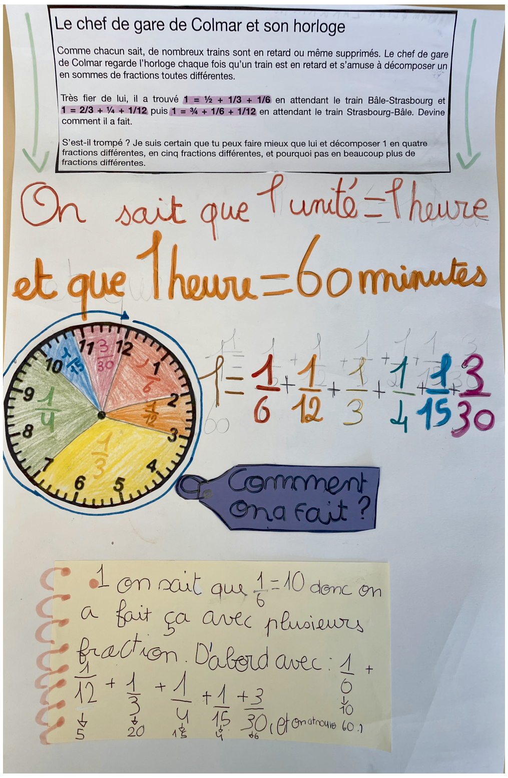


Figure 13. *Production d'un groupe d'élèves.*

Résultats trouvés par les élèves

$$1 = \frac{2}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$
$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{2}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{3}{10}$$
$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{3}{30}$$
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$
$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3}$$
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12}$$

Figure 14. *Résultats trouvés par les quatre groupes.*

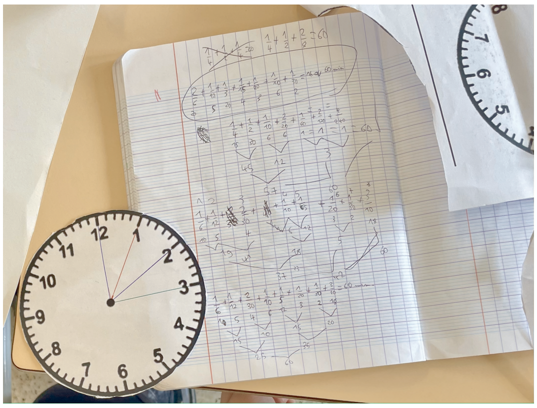


Figure 15. *Ce problème a été travaillé et les outils expliqués en amont aux CM1 qui se sont vus octroyer la responsabilité d'une équipe lors de la résolution en classe entière.*

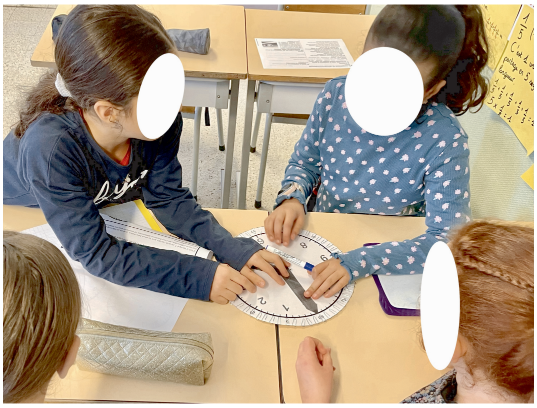


Figure 16. *À droite, Maryam en CM1 explique à un groupe de CM2 comment le chef de gare a obtenu ces résultats grâce à l'horloge et aux trombones.*

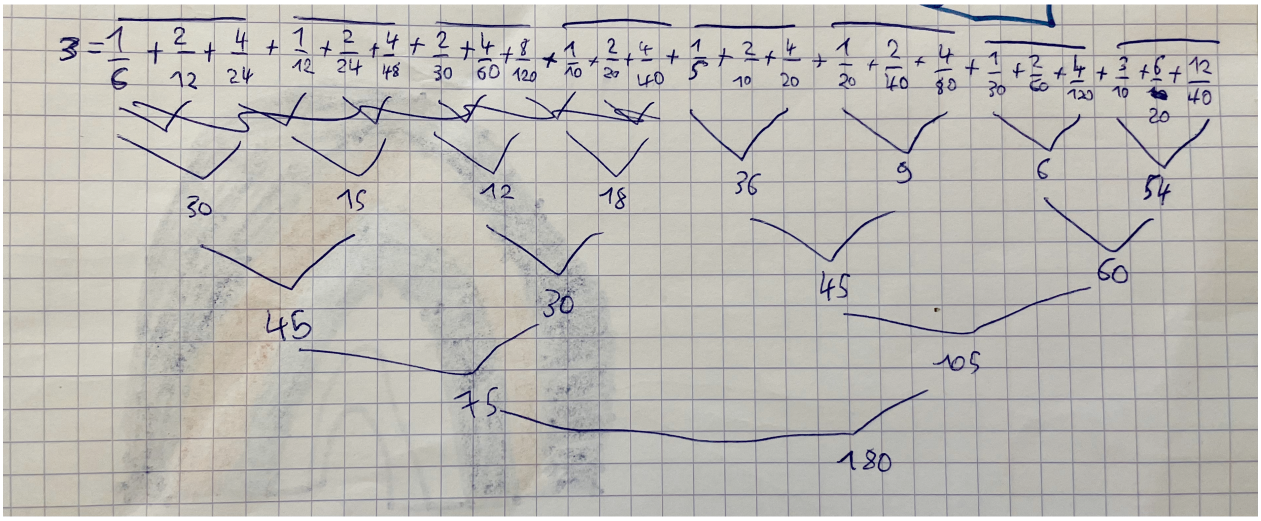


Figure 17. *Plusieurs élèves, motivés à l'idée de trouver l'addition la plus longue, ont continué à travailler lors des temps d'autonomie. J'ai proposé à certains de prolonger leurs recherches en décomposant 3 en fractions différentes. L'élève montre clairement comment il procède par analogie pour effectuer ses calculs.*

Quelques exemples de problèmes donnés aux élèves

La réussite des élèves à résoudre des problèmes proposés à distance par Serge Petit et qu'il nomme *défis* (voir encadrés ci-après) les motive et ils prennent ensuite plaisir à rédiger des problèmes que je soumets aux élèves de Sixième que je suis par ailleurs. Si les élèves de Sixième ont tendance à baisser les bras, mes élèves, au contraire, se réjouissent d'avoir de tels défis à relever. La rédaction par les élèves d'énoncés de problèmes accompagnés des éléments essentiels de la solution consolide les mécanismes en jeu.

Un défi

Sofia a 20 billes dans son sac. Trois cinquièmes de ses billes sont bleues, un quatrième de ses billes sont vertes et trois vingtièmes de ses billes sont rouges. Combien Sofia a-t-elle de billes bleues, vertes et rouges ?

Ce problème a été résolu par trois groupes d'élèves sur quatre.

Les élèves ont ensuite été invités à créer d'autres énoncés.

Un groupe a produit l'énoncé suivant :

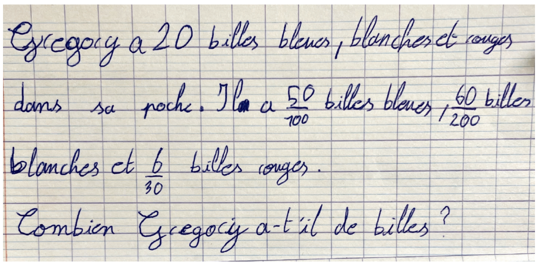

Gregocy a 20 billes bleues, blanches et rouges dans sa poche. Il a 50/100 billes bleues, 60/200 billes blanches et 6/30 billes rouges.
Combien Gregocy a-t-il de billes ?

Figure 18. *Énoncé produit par imitation.*

(remarque : il faut comprendre « *Combien Grégory a-t-il de billes de chaque couleur ?* »)

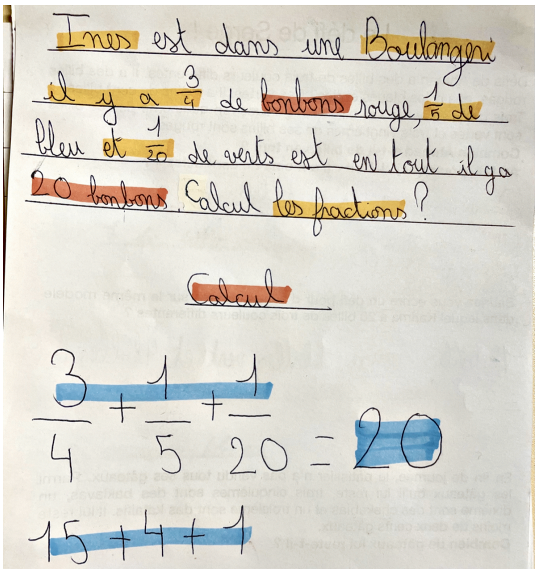


Figure 19. *Énoncé de problème créé par imitation par des élèves plutôt considérés comme « faibles » et bribes de solution.*

Des problèmes analogues, à réponses multiples, par exemple 30, 45, 60, 75 etc. sont également réussis par une bonne partie des élèves.

Défi dit « d'Ahmad »

Ahmad a des billes de trois couleurs différentes. Il a des billes rouges, des billes bleues et des billes vertes. Il a moins de cent billes. Trois cinquièmes de ses billes sont bleues, un quatrième de ses billes sont vertes et trois vingtièmes de ses billes sont rouges. Combien Ahmad a-t-il de billes en tout ?

Voici un autre défi, portant sur des calculs de masses exprimées sous forme fractionnaire.

Un autre défi

David fait un gâteau. Pour le faire, il mélange deux œufs d'un vingtième de kilogramme chacun, un huitième de kilogramme de beurre, un dixième de kilogramme de sucre et un huitième de kilogramme de farine.
Quelle sera en kilogramme la masse de son gâteau avant la cuisson ?

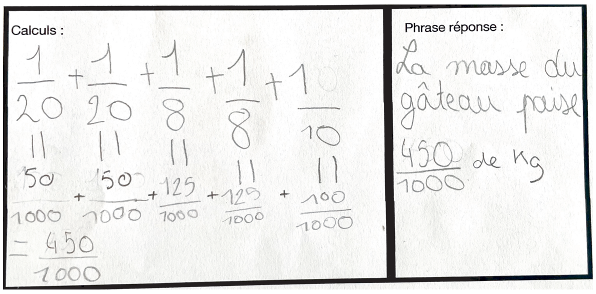


Figure 20. *Solution d'un élève.*

La maîtrise de la droite graduée n'est pas facile à acquérir. Afin de consolider l'apprentissage de cet outil de représentation, des défis tels que les trois suivants ont été donnés aux élèves.

Quelques exemples de défis

- Premier type de défi : placer le plus grand nombre de désignations de fractions sur une droite graduée. Les calculs se font tous mentalement. Ce qui était au départ un défi s'est transformé en rituel.

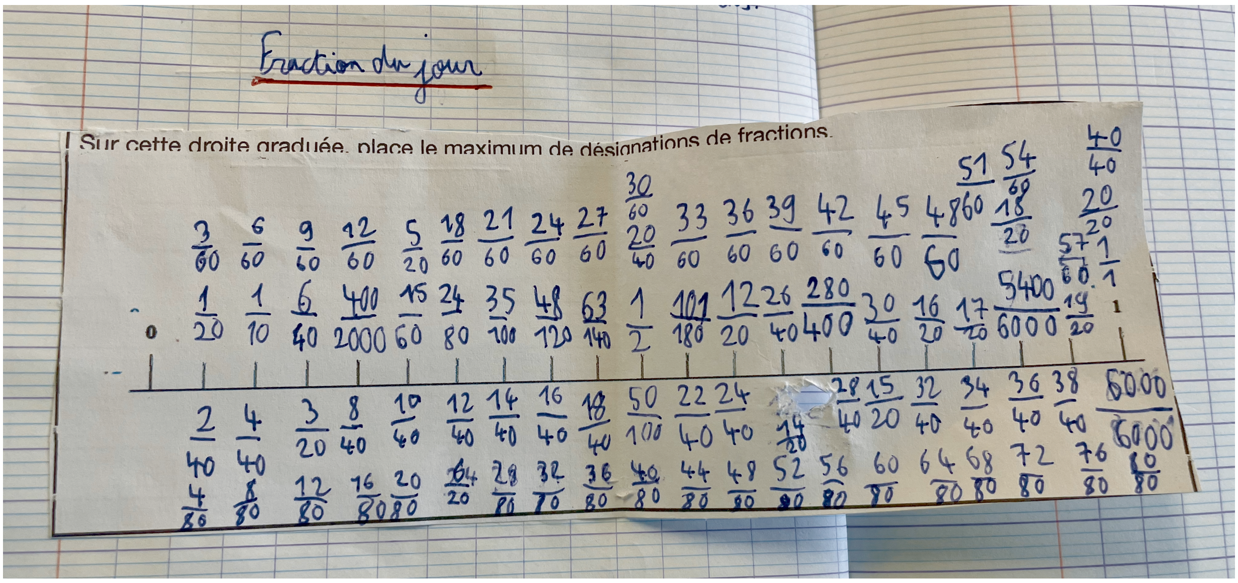


Figure 21. *Placer le plus de désignations de fractions sur une droite graduée (rituel).*

- Deuxième type de défi : une droite sur laquelle ne figure que la désignation d'une fraction $\left(\frac{1}{4}\right)$ est donnée, les élèves doivent graduer cette droite de manière à ce que la fraction représentée soit à sa place (le choix de la longueur du segment unitaire est donc libre).
- Troisième type de défi : une droite sur laquelle ne figurent que les indications $\frac{5}{3}$ et $\frac{7}{3}$ est fournie aux élèves. On leur demande de positionner le 0 et le 1 (aucun degré de liberté).

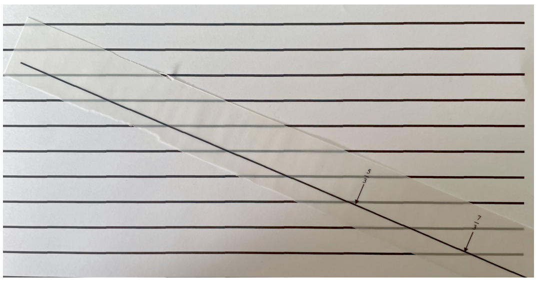


Figure 22. *Solution, étape 1.*

Figure 23. *Solution, étape 2.*

Aucun entraînement visant à compléter la droite graduée n'avait été proposé préalablement aux élèves. Pratiquement tous les élèves ont réussi très rapidement ces deux défis. Ce qui me conduit à évoquer l'évaluation des acquis des élèves.

L'évaluation des acquis des élèves

Une évaluation, dont les résultats n'ont aucune valeur scientifique, a été réalisée en fin d'année. Elle m'a permis d'observer que la très grande hétérogénéité de ma classe en mathématiques en début d'année s'est fortement estompée, au moins dans le domaine des fractions. Parmi les exemples de tests fort bien réussis figure l'activité qui consiste à placer des fractions sur des droites graduées. Quelques fractions étant données, les élèves devaient choisir parmi trois droites graduées celle sur laquelle ils pouvaient positionner ces fractions, puis les placer au bon endroit. D'autres items portaient sur l'encadrement de fractions entre deux entiers consécutifs ou l'écriture d'une fraction sous la forme « $n + f$ », n étant un entier, f une fraction strictement inférieure à 1. Une évaluation, commune à toutes les classes de cycle 3 de mon école, a mis en évidence une plus grande aisance de mes élèves que ceux des autres classes, y compris les CM2, mais peut-être ai-je passé beaucoup plus de temps sur l'enseignement des fractions que mes collègues…

L'évaluation sommative n'est pas la seule que je pratique. Je procède de fait, tout au long de mes séances, à des évaluations en continu des élèves, notamment dans les activités ritualisées. J'ai pu constater que tous les élèves s'engagent dans toutes les recherches que je leur propose, bien souvent sous la forme de défis qu'ils doivent relever. Cette simple désignation (le mot *défi*) semble les motiver davantage, à tel point que bien des élèves sont demandeurs de défis portant sur les fractions. Leur réussite les encourage et les motive.

Conclusion

Du point de vue de l'aspect pédagogique, prendre appui sur les propositions de Sylvain Connac et celles du collectif Didactique pour enseigner a été un choix judicieux. En donnant les mêmes tâches à tous les élèves, sans stigmatiser ceux étant en difficulté, mais en les accompagnant de manière spécifique, cette approche leur a permis d'obtenir de bons résultats non seulement sur ce sujet précis, mais aussi en mathématiques de manière générale.

Ces bénéfices sont, à mon sens, en grande partie dus à la mise en place de défis de groupes grâce auxquels les élèves ont développé une appétence avérée à la résolution de problèmes.

Au fil des séances, grâce à une approche agile [7], les progrès des élèves sont tels qu'aujourd'hui, ils sont capables de développer des stratégies

7. Dans la gestion de projet, l'agilité permet aux équipes de fixer des objectifs de manière autonome et de les atteindre grâce à des processus personnalisés. J'ai découvert qu'un manifeste de la pédagogie agile a été publié par Christian Den Hartigh mais ici ce terme n'y fait que fortuitement référence.

innovantes pour résoudre des problèmes (dépassant pour certains les attendus de fin de cycle), démontrant ainsi une compréhension profonde des concepts mathématiques en jeu.

Je m'inscris donc en faux contre une différenciation qui reposerait sur le fait de proposer des supports « plus simples » aux élèves jugés faibles et ainsi de les stigmatiser.

En valorisant la réflexion critique et la collaboration, notre approche a ainsi permis aux élèves de devenir les acteurs de leur propre apprentissage qu'ils abordent en toute confiance.

Cette évolution positive est également due à la mise en place de nombreux rituels quotidiens permettant aux élèves d'aiguiser leur intuition mathématique.

Pour conclure sur ce premier point, si je peux affirmer une chose c'est que, oui, les mathématiques demandent discipline, persévérance et abnégation… mais ce travail montre tout le plaisir que l'on peut prendre à cela !

Parler des bénéfices de ce travail pour les élèves sans parler de ce qu'il m'a apporté en dresserait un tableau incomplet. En effet, il me semble essentiel de souligner l'importance de l'accompagnement régulier par un formateur qui m'a permis de prendre du recul sur mes pratiques, sur ma conception même des concepts mathématiques en question, et d'adopter une approche plus exigeante envers mes élèves, mais surtout envers moi-même.

Venant d'un milieu professionnel dans lequel le travail coopératif était au cœur de tout projet, je me suis aperçu qu'il n'est pas facile pour des professeurs, souvent isolés, de construire de tels dispositifs. Pourtant, comme le précise le collectif Didactique pour enseigner, *« le travail collectif en relation étroite avec la recherche et la formation est une dimension du métier de professeur à privilégier pour affronter le défi de l'hétérogénéité »* [6, p. 24]. Cela ne pourrait-il pas amener à réfléchir différemment la formation initiale et continue des professeurs des écoles ?

Pour ma part, je dois souligner qu'ayant débuté ce travail en T1 [8] et après trois années de collaboration avec Serge Petit, ma posture et mes gestes professionnels ont grandement évolué. Grâce à sa bienveillance et à mes (très) nombreuses remises en question, nous avons pu offrir aux élèves des activités authentiques de recherche et constater que, même en REP, les élèves sont capables de s'approprier les mathématiques de manière profonde, durable et avec plaisir.

Ce travail illustre la chance que nous offre notre métier qui, au quotidien, nous donne le pouvoir de transformer les défis en opportunités de formation personnelle, créant ainsi un environnement propice à l'épanouissement de tous, élèves comme enseignant. Hartmut Rosa [7] parlerait ici de pédagogie de la résonance !

Notre travail continue et se centre actuellement sur le délicat passage des fractions aux nombres décimaux et sur leur enseignement.

Références

[1] Collectif Didactique pour enseigner. *Didactique pour enseigner*. Presse Universitaire de Rennes, 2019.

[2] Sylvain Connac. « Neuroéducation et pédagogie ». In : *Éducation et socialisation* nº 49 (2018). Mis en ligne le 1er septembre 2018.

[3] Jean Toromanoff. *Promenade dans les symboles mathématiques*. T. 1. Autoédition, 2018.

[4] Serge Petit. « Faire parler les nombres ? » In : *Au fil des maths* 549 (juillet-septembre 2023).

[5] Ministère de l'Éducation nationale. « Annexe 5. Le guide-âne ». In : *Fractions et nombres décimaux au cycle 3*. Novembre 2016.

[6] Collectif Didactique pour enseigner. *Enseigner, ça s'apprend*. Coll. *Mythes et réalités*. RETZ, 2020.

[7] Hartmut Rosa. *Résonance. Une sociologie de la relation au monde. Coll. Théorie critique*. Paris : La Découverte, 2018. 536 p.

[8] Ministère de l'Éducation nationale. *Repères annuels de progression. Cycle 3, Mathématiques*. 24 avril 2019.

Guillaume Assali est professeur des écoles en cycle 3 dans une école de REP à Arles.

guillaume.assali1@ac-aix-marseille.fr

8. T1 : titulaire en première année d'exercice après le recrutement.

Sommaire du nº 553

Accompagnement des élèves

Éditorial 1

Opinions

Groupes de niveaux en mathématiques au collège
Jean-Claude Rauscher 3

De l'utilisation des matériels de numération
Serge Petit 6

Quel avenir pour l'inclusion ?
Claire Lommé 12

Avec les élèves

Les fractions, c'est pas du gâteau !
Guillaume Assali 14

« Le plus grand produit » en CM1
G. Aldon, F. Margerand, S. Roussel & A. Viry-Leroi ... 26

Vers la ligne graduée en Grande Section
Alexandra Homsi 34

Suivi d'une constellation sur les grandeurs
Mathilde Pretis 38

Vers plus d'autonomie
Amélie Cazottes 43

Accompagner les élèves en lycée professionnel
Mélanie Berthelot-Lepage 47

Un *RallyCoach* avec les élèves ?
Erwan Démézet & Gaëlle Morvan 52

La compétence « Chercher » en Troisième
Morgan Gilot 59

Ouvertures

Les mystères du sphinx
Yves Farcy 66

Relations de voisinage au pays basque
Pierre Carriquiry 73

Récréations

Au fil des problèmes
Frédéric de Ligt 78

Des problèmes dans nos classes
Valérie Larose 81

Au fil du temps

Le CDI de Marie-Ange
Marie-Ange Ballereau 83

Matériaux pour une documentation 85

Les blocs de base 10
Gonzague Jobbé-Duval 89

APMEP
www.apmep.fr