Énoncé
Résoudre en nombres entiers $ab + c = 2023$ et $a + bc = 2024$.

Considérons un triplet (a, b, c) solution.
En retranchant membre à membre la première égalité de la deuxième, on obtient $a + bc - ab - c = 2024 - 2023$, c'est-à-dire $a(1 - b) - c(1 - b) = 1$, soit encore $(a - c)(1 - b) = 1$.
Les nombres a, b et c sont entiers donc $a - c$ et $1 - b$ le sont aussi et on a soit $a - c = 1 - b = 1$, soit $a - c = 1 - b = -1$, c'est-à-dire soit $b = 0$ et $a = 1 + c$, soit $b = 2$ et $a = c - 1$.
Procédons par disjonction de cas :

- Si $b = 0$ et $a = 1 + c$ alors les égalités de l'énoncé fournissent immédiatement $c = 2023$ et $a = 2024$. On a donc un seul triplet candidat, en l'occurrence $(a, b, c) = (2024, 0, 2023)$.
- Si $b = 2$ et $a = c - 1$ alors les égalités de l'énoncé s'écrivent alors $2a + c = 2023$ et $a + 2c = 2024$. En utilisant dans l'une ou l'autre que $a = c - 1$, on obtient $c = \frac{2025}{3} = 675$ et $a = 674$. On a donc un seul triplet candidat, en l'occurrence $(a, b, c) = (674, 2, 675)$.

On vérifie sans peine que les deux triplets candidats conviennent.
Conclusion : $\mathscr{S} = \{(2024, 0, 2023); (674, 2, 675)\}$.

Yannis BRENEY
Régionale de Franche-Comté