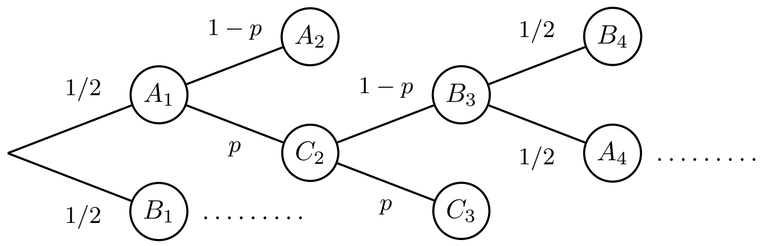
apmep-551-1

Je note A_i l'évènement « A gagne la partie i » (idem pour B et C) et C l'évènement « C gagne le jeu ».

Le jeu se symbolise par l'arbre pondéré suivant où p est la probabilité de gain d'une partie pour C



$c = P_{A_1}(C) = p^2 + p(1-p)\dfrac{1}{2} \times P_{A_1C_2B_3A_4}(C)$

Or la séquence $A_1C_2B_3A_4$ remet le jeu dans le même état qu'après A_1

De $P_{A_1C_2B_3A_4}(C) = P_{A_1}(C)$ on déduit $c = p^2 + \dfrac{1}{2}p(1-p)c$.

Toute partie entre A et B est équitable donc $P(C) = P_{A_1}(C)$.

Le jeu est équitable si $c = \dfrac{1}{3}$ ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} = p^2 + \frac{1}{2}p(1-p)\frac{1}{3} \quad &\iff \quad 2 = 6p^2 + p - p^2 \\
&\iff \quad 5p^2 + p - 2 = 0 \\
&\iff \quad p = \frac{\sqrt{41}-1}{10}
\end{aligned}$$