

### apmep-551-3

Je note  $c(n)$  le nombre de chiffres de l'écriture décimale de l'entier naturel non nul  $n$

La fraction  $\frac{a}{b}$  vérifie la propriété voulue si et seulement si  $\frac{b}{10^{c(b)}} \leq \frac{a}{b} < \frac{b+1}{10^{c(b)}}$  c'est à dire  $\frac{b^2}{10^{c(b)}} \leq a < \frac{b^2+b}{10^{c(b)}}$

Ainsi, pour  $b$  donné, l'entier  $a$  doit être choisi dans l'intervalle  $I_b = \left[ \frac{b^2}{10^{c(b)}}, \frac{b^2+b}{10^{c(b)}} \right[$

La largeur de l'intervalle  $I_b$  croît de  $1/10$  à  $1$  (exclu) quand  $b$  varie de  $10^k$  à  $10^{k+1}$  (exclu). Donc il y a au plus une solution pour  $a$  et les chances d'avoir une solution augmente avec le chiffre prépondérant de l'écriture décimale de  $b$ .

Voici une fonction python qui calcule  $a$  :

```
def a(b) : # b entier naturel non nul
    -> c = len( str(b) )
    -> l = b / 10**c
    -> m = b*l
    -> M = m+1
    -> if int(m)==m or ( int(m)< int(M) and not(int(M)==M) ) :
    -> -> return int(M)
    -> else :
    -> -> return 0
```

Exemples :

```
for b in range(100,120) :
    -> if a(b) == 0 :
    -> -> print(b," : pas de solution")
    -> else :
    -> -> print(b," : ", a(b),"/",b,"=",a(b)/b)
```

```
100 : 10 / 100 = 0.1
101 -> 113 : pas de solution
114 : 13 / 114 = 0.11403508771929824
115 -> 117 : pas de solution
118 : 14 / 118 = 0.11864406779661017
119 : pas de solution
```

```
for b in range(990,1000) :
    -> if a(b) == 0 :
    -> -> print(b," : pas de solution")
    -> else :
    -> -> print(b," : ", a(b),"/",b,"=",a(b)/b)
```

```
990 : 981 / 990 = 0.990909090909091
991 : 983 / 991 = 0.9919273461150353
992 : 985 / 992 = 0.9929435483870968
993 : 987 / 993 = 0.9939577039274925
994 : 989 / 994 = 0.9949698189134809
995 : 991 / 995 = 0.9959798994974874
996 : 993 / 996 = 0.9969879518072289
997 : 995 / 997 = 0.9979939819458375
998 : 997 / 998 = 0.998997995991984
999 : pas de solution
```