Soit p la probabilité que C gagne quand il joue contre A (ou B). On classe les parties où C gagne en les classant selon le nombre de coups qu'il a mis pour parvenir à gagner.

La séquence ACB par exemple signifie A gagne contre B puis C gagne contre A puis B gagne contre C.

Pour chaque suite de coups, on écrit la probabilité que cela arrive. On a donc :

$\left.\begin{array}{l} ACC \\ \text{ou } BCC \end{array}\right)$ probabilité $2 \times \frac{1}{2} \times p \times p$ soit p^2

$\left.\begin{array}{l} ACBACC \\ \text{ou } BCABCC \end{array}\right)$ —— $2 \times \frac{1}{2} p(1-p) \frac{1}{2} p . p$ soit $\frac{1}{2}(1-p)p^3$

$\left.\begin{array}{l} ACBACBACC \\ \text{ou } BCABCABCC \end{array}\right)$ —— $2 \times \frac{1}{2} p(1-p) \frac{1}{2} p(1-p) \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{4}(1-p)^2 p^4$

On voit bien que l'on passe d'une partie à l'autre en supprimant la dernière lettre C (probabilité p) et en rajoutant le motif BACC, probabilité $(1-p)\frac{1}{2}p^2$.

La probabilité que C gagne est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme p^2 et de raison $\frac{1}{2}(1-p)p$ soit $p^2 \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(1-p)p}$

p est donc positif et vérifie

$$\frac{p^2}{1-\frac{1}{2}(1-p)p} = \frac{1}{3}$$ soit $5p^2+p-2=0$ donc

$$p = \frac{-1+\sqrt{41}}{10}$$ soit 0,5403 légèrement supérieur à 0,5 comme attendu.