La poule à trois joueurs

On suppose que le joueur C a la même probabilité de gagner la partie contre le joueur A ou contre le joueur B. On note p cette probabilité de gain de C contre A (ou contre B).
Soit k un entier naturel, on va déterminer la probabilité que C gagne le jeu à l'issue de la $k^{ème}$ partie.

Supposons que A gagne la première partie contre B, avec une probabilité $\frac{1}{2}$; il joue ensuite contre le joueur C.
Si A gagne la partie, le jeu s'arrête ;
si C gagne la partie, il joue contre B

Si C gagne la partie, le jeu s'arrête et on est dans le cas $k = 3$
Si B gagne la partie, il joue contre A

Si B gagne le jeu s'arrête
Si A gagne la partie, il joue contre C.

Dans cette situation on retrouve la situation de départ. Ce qui signifie que :

- C ne gagnera le jeu qu'à la suite d'une série du type : A gagne (contre B), C gagne, C gagne
- Cette série sera précédée de séries du type : A gagne (contre B), C gagne, B gagne
- Si k n'est pas un multiple de 3, alors la probabilité que C gagne le jeu à l'issue de la k^{eme} partie est nulle

Ainsi par exemple C gagne le jeu en 9 coups après la série :
A gagne (contre B), C gagne, B gagne, A gagne, C gagne, B gagne, A gagne, C gagne, C gagne

La probabilité d'obtenir une série A gagne (contre B), C gagne, B gagne est $\frac{1}{2} \times p \times (1-p)$
La probabilité d'obtenir une série A gagne (contre B), C gagne, C gagne est $\frac{1}{2} \times p \times p$

Si B gagne la première partie, on a un résultat similaire en échangeant les rôles de A et de B

Par conséquent pour un entier naturel , si $k = 3l$ alors la probabilité que C gagne le jeu à l'issue de la k^{eme} partie est $2 \times \left(\frac{1}{2}p(1-p)\right)^{l-1}\left(\frac{1}{2} \times p \times p\right)$
En conclusion, si $k = 3l$ alors la probabilité que C gagne le jeu à l'issue de la $k^{ème}$ partie est $\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} p^{l+1}(1-p)^{l-1}$, et 0 sinon

Par conséquent, la probabilité que C gagne le jeu vaut $\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} p^{l+1}(1-p)^{l-1}$, soit $\frac{p^2}{1-\frac{1}{2}p(1-p)}$
Par exemple, si $p = \frac{1}{2}$ alors cette probabilité vaut $\frac{4}{14}$ qui est bien inférieure à la probabilité de gain de A ou de B qui elle est égale à $\frac{5}{14}$
Si on souhaite que le jeu soit équitable, il nous faut déterminer p tel que $\frac{p^2}{1-\frac{1}{2}p(1-p)} = \frac{1}{3}$; la résolution de l'équation donne pour seule solution positive $p = \frac{-1+\sqrt{40}}{10} = 0,53245$

Le programme ci-joint écrit en langage Python permet de simuler le jeu et déterminer une estimation de la probabilité de gain de C en fonction du choix de p.
On peut facilement modifier le programme en donnant des probabilités de gain de A sur C et de B sur C différentes.