Une rosace trilobée

Remarque 1

Soit ABC un triangle équilatéral et $\mathcal{C}$ son cercle inscrit de centre O. Les cercles inscrits des triangles OAB, OBC, OCA forment avec $\mathcal{C}$ une rosace trilobée.

Remarque 2

Le cercle circonscrit d'un triangle équilatéral a même centre que son cercle inscrit et un rayon double.

Construction des centres des cercles colorés

Soit O le centre de $\mathcal{C}$ et soit $\mathcal{C}'$ le cercle de même centre et de rayon double. Soit A'B' et CC' deux diamètres orthogonaux de $\mathcal{C}'$. Soit AB la corde commune de $\mathcal{C}'$ et du cercle de même rayon centré en C'. (A du même côté que A' par rapport à CC'). Le point d'intersection des diagonales du quadrilatère A'B'BA est le centre d'un cercle coloré. Les autres centres s'en déduisent par rotation de 120°.

Démonstration

Par construction les triangles OAC' et OBC' sont équilatéraux. Donc l'angle AOB vaut 120° ainsi que les angles BOC et COA. Par suite le triangle ABC est équilatéral. $\mathcal{C}$ est son cercle inscrit et $\mathcal{C}'$ son cercle circonscrit. Le cercle inscrit du triangle AOB est donc un cercle coloré. Les diagonales AB' et BA' sont aussi les bissectrices des angles OAB et OBA. En effet les angles inscrits BAB' et ABA' ont une mesure moitié des angles au centre correspondants soit 15°. D'où le résultat annoncé.