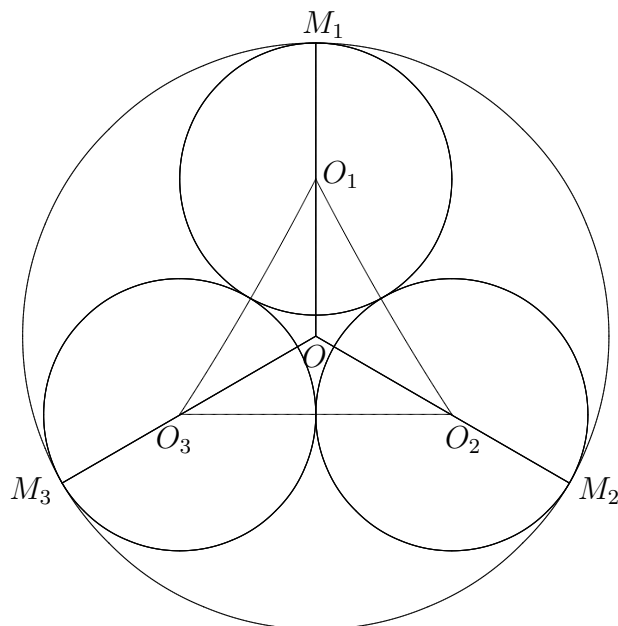


551-2 Une rosace trilobée.

Soit un cercle \mathcal{C} ; construire trois cercles \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 de même rayon, tangents entre eux et tangents à \mathcal{C} .

Solution de Marie-Nicole Gras.

(I) On suppose d'abord que le problème est résolu.



Les trois cercles \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 , de rayon r , ont pour centres respectifs O_1 , O_2 et O_3 ; ces trois centres sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté $2r$. Soit O le centre de ce triangle ; alors O est le centre du cercle \mathcal{C} tangent à \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 et son rayon R vérifie $R = OO_1 + r$.

Puisque O est le centre du triangle $O_1O_2O_3$, on a

$$OO_1 = OO_2 = OO_3 = \frac{2r\sqrt{3}}{3},$$

et donc,

$$R = r + \frac{2r\sqrt{3}}{3} = \frac{3r + 2r\sqrt{3}}{3}.$$

On en déduit :

$$r = \frac{3R}{3 + 2\sqrt{3}} = \frac{3R(2\sqrt{3} - 3)}{3} = 2R\sqrt{3} - 3R,$$

et donc :

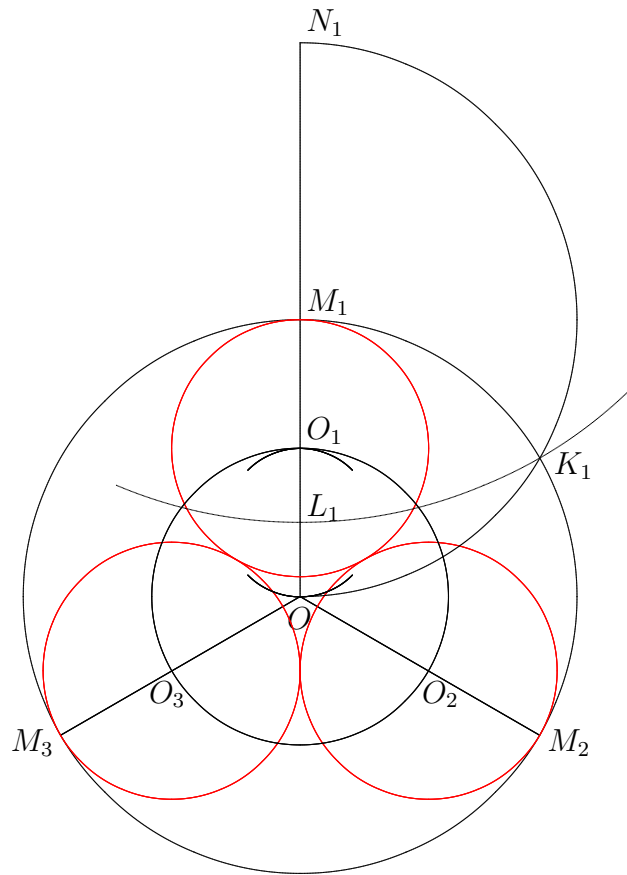
$$OO_1 = OM_1 - O_1M_1 = R - r = 2(2R - R\sqrt{3}).$$

En utilisant un triangle rectangle de côtés $2R$, $R\sqrt{3}$, R , on en déduit une construction géométrique de O_1 .

(II) Construction géométrique des trois cercles.

Le cercle \mathcal{C} est donné. Si son rayon R et son centre O ne sont pas donnés, il est facile de les déterminer. On prend trois points A , B , C sur \mathcal{C} , et on trace, à la règle et au

compas, les médiatrices de AB et AC . Ces médiatrices se coupent en un point O et $R = OA$.



Voici la construction à la règle et au compas des trois centres O_1, O_2, O_3 de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$:

- On choisit un point M_1 sur \mathcal{C} et on trace la droite OM_1 .
- Le cercle de centre M_1 et de rayon $R = OM_1$ recoupe cette droite en N_1 et \mathcal{C} en K_1 .
- Le cercle de centre N_1 et de rayon N_1K_1 recoupe OM_1 en L_1 .
- Le cercle de centre L_1 et de rayon L_1O recoupe OM_1 en O_1 .

On a $OO_1 = 2OL_1 = 2(2R - R\sqrt{3})$ et O_1 est le centre du cercle \mathcal{C}_1 de rayon O_1M_1 .

- On trace les points M_2 et M_3 tels que $\widehat{M_1OM_2} = \widehat{M_1OM_3} = 120^\circ$ et les rayons OM_2 et OM_3 .
- Le cercle de centre O et de rayon OO_1 recoupe OM_2 et OM_3 en O_2 et O_3 .

Il ne reste plus qu'à tracer les trois cercles.