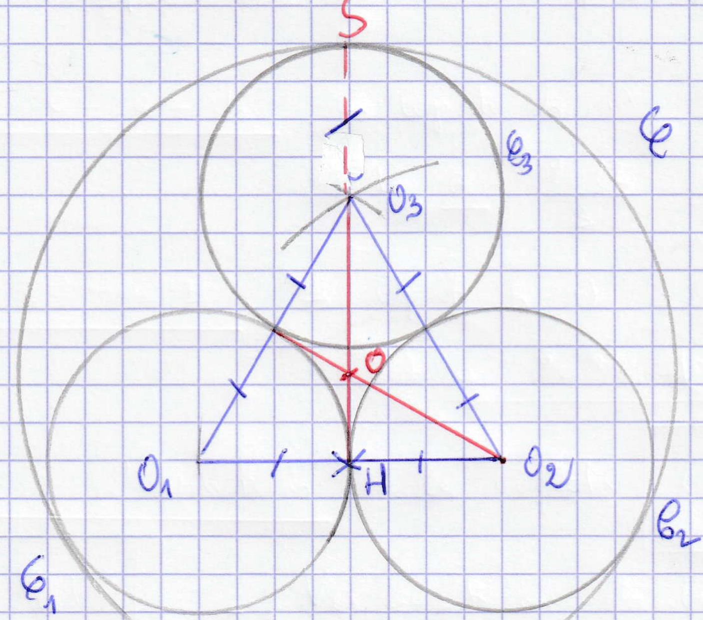
Problème n°551-2 "Une rosace trilobée"

Analyse (ou figure d'étude comment on disait autrefois)

→ je pars des 3 cercles égaux $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ tangents 2 à 2 et je construis le cercle $\mathcal{C}$. Les centres O_1, O_2 et O_3 sont les sommets d'un Δ équilatéral et le rayon commun est la moitié de ce côté.

→ Le centre O du cercle $\mathcal{C}$ est aussi le centre du Δ $O_1O_2O_3$.



→ j'appelle r le rayon des 3 cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$

→ le côté du Δ équilatéral $O_1O_2O_3$ est donc $2r$

→ On a donc $O_3H = 2r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$, $OO_3 = \frac{2}{3} O_3H = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$

et le rayon R du cercle $\mathcal{C}$ vaut donc $\frac{2}{3} r\sqrt{3} + r$

D'où l'équation d'inconnue (r) puisque R est connu :

$$\boxed{\frac{2}{3} r\sqrt{3} + r = R}$$

(3/3

On en tire $r = \dfrac{R}{\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1} = R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right) \times \dfrac{1}{\frac{1}{3}}$

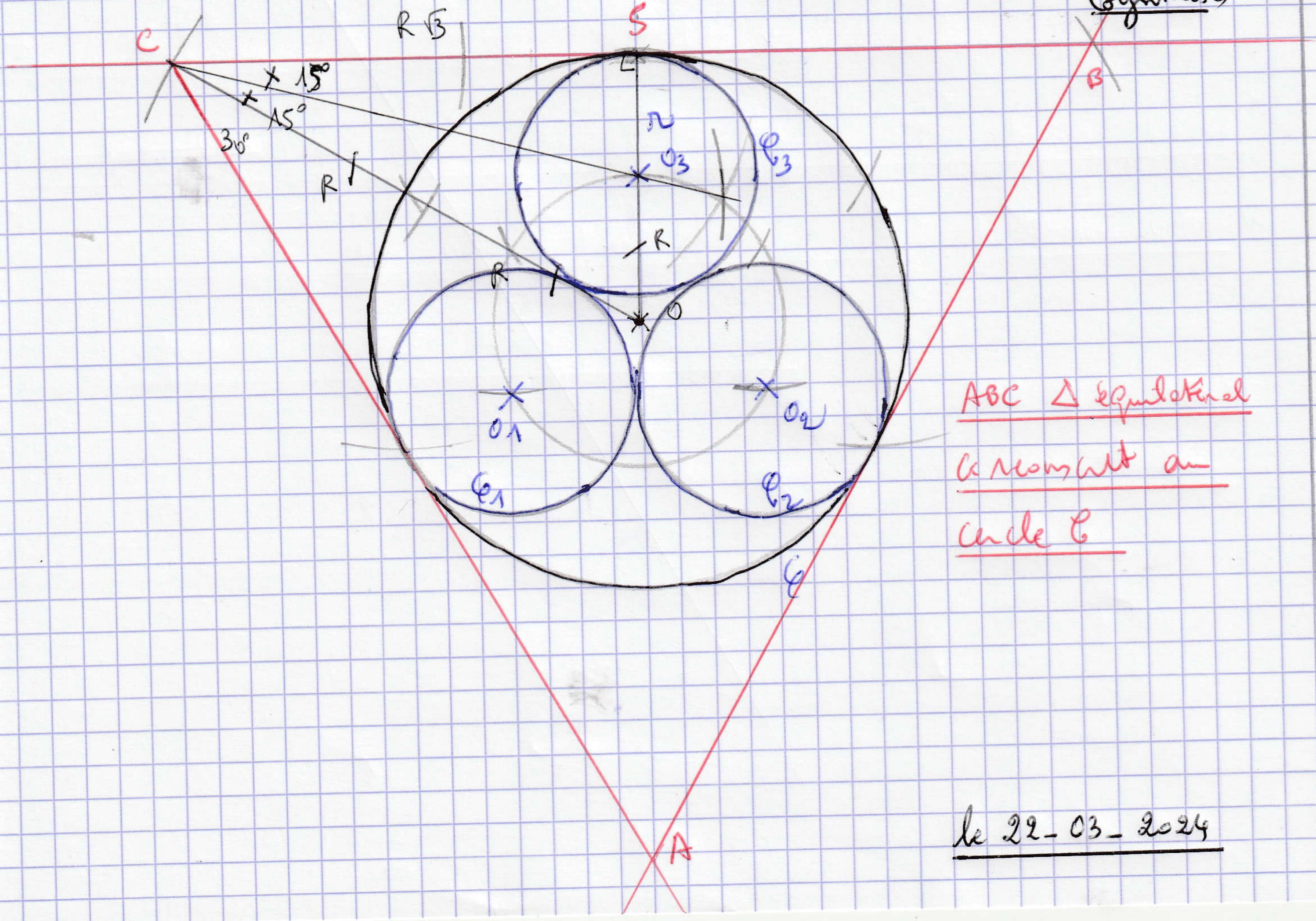
soit finalement $\underline{r = R(2\sqrt{3} - 3) = R\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}$

mais $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan 2 \times 15° = \dfrac{2 \times \tan 15°}{1 - \tan^2 15°}$

d'où $\underline{\tan 15° = 2 - \sqrt{3}}$ et $\underline{r = R\sqrt{3} \times \tan 15°}$

$(\underline{R\sqrt{3}} = \sqrt{(2R)^2 - R^2}.)$ D'où la construction cherchée

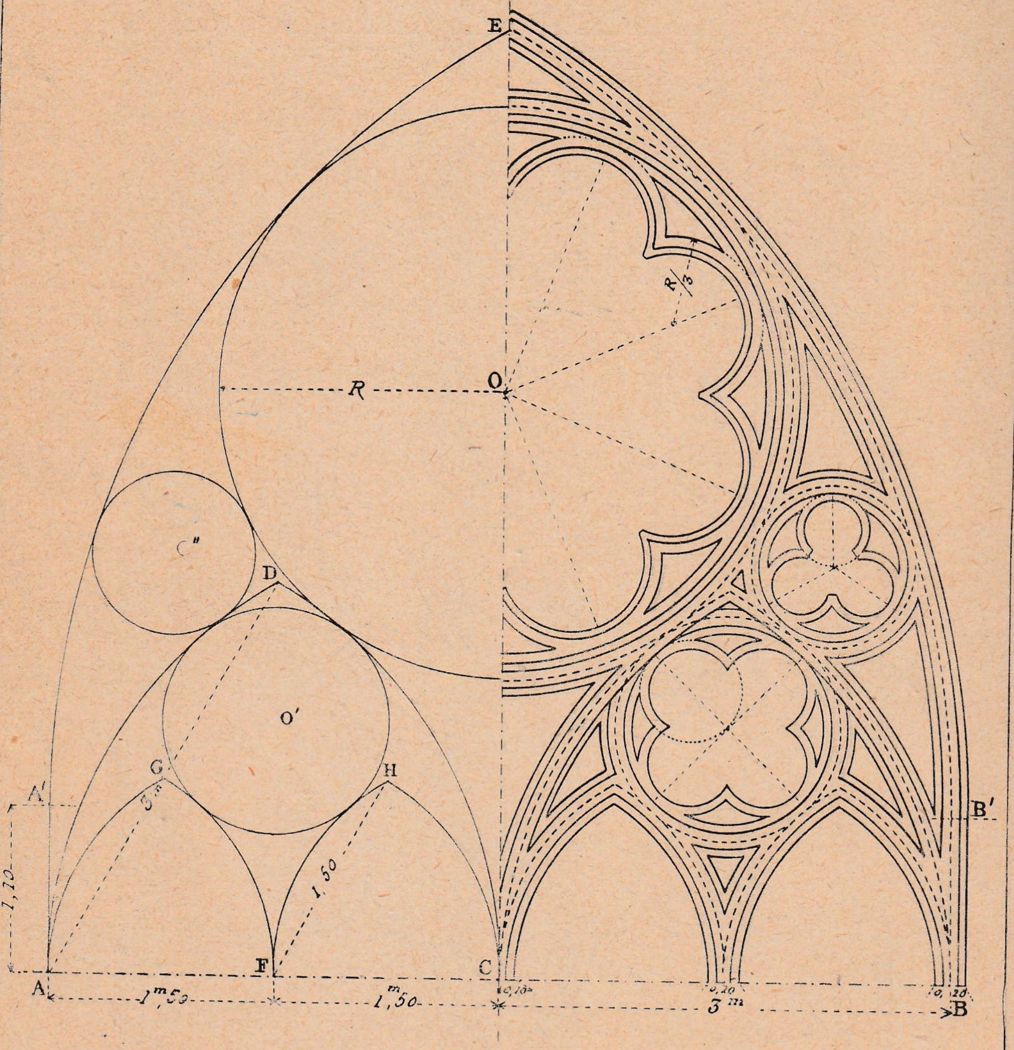
(synthèse)



ABC Δ équilatéral circonscrit au cercle $\mathcal{C}$

le 22-03-2024

FENÊTRE OGIVALE

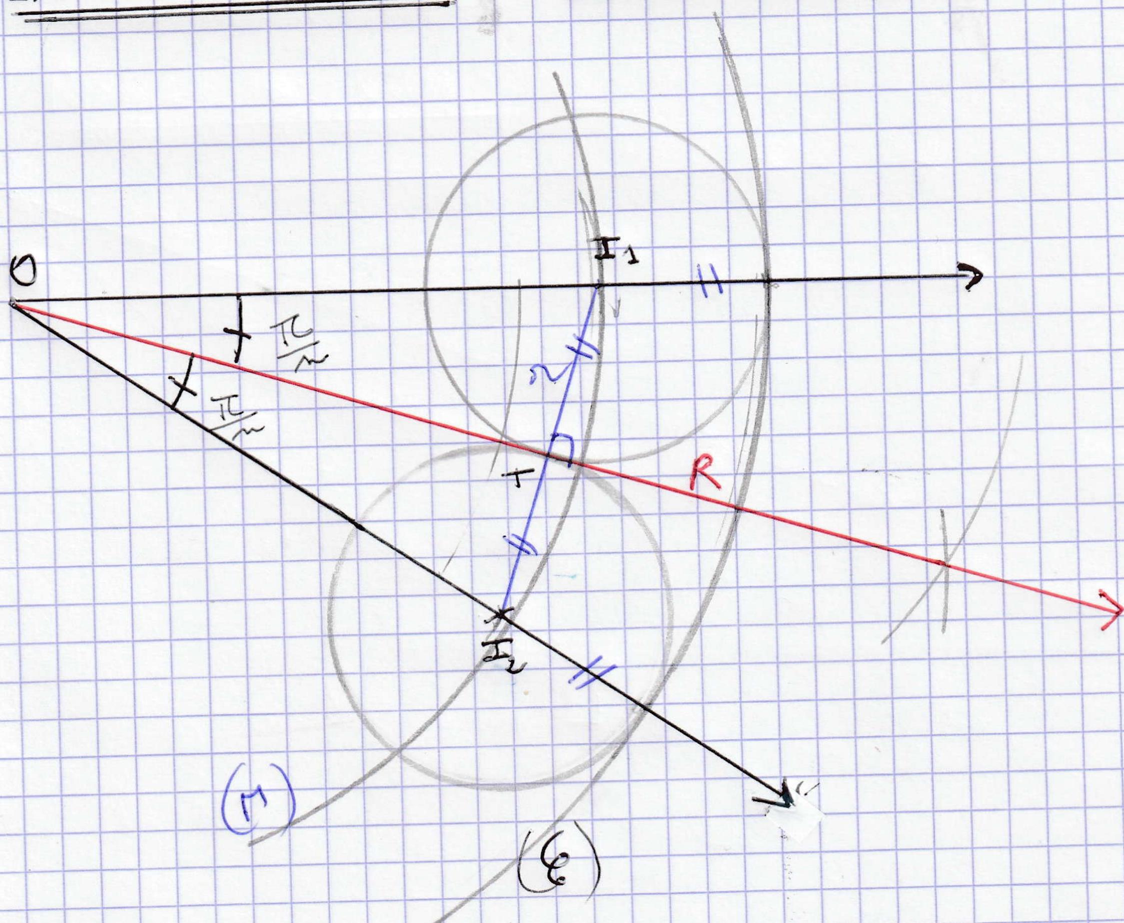


À reproduire à l'échelle de 0m 025 pour 1 mètre

J. D.

Au fil des Maths n° 551

Problème n° 551-2 Rosace "n-lobée"



- S'il y a "n-lobes" tangents 2 à 2 et tangents au cercle C, le cercle C est partagé en n secteurs d'angle au centre $\frac{2\pi}{n}$.

- Dans le △ rectangle OI_1T on a : $OI_1 = R - r$ et $I_1T = r$

d'où $\boxed{\sin\frac{\pi}{n} = \frac{r}{R-r}}$

Si $n = 3$, $\sin\frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

On en déduit que $\boxed{r = \frac{R\sin\pi/n}{1+\sin\pi/n}}$

$r = \frac{R\sqrt{3}/2}{1+\sqrt{3}/2} = R\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3})$

$= R\sqrt{3}\tan 15°$

→ Les centres des n-lobes sont donc sur le cercle (Γ) de centre O et de rayon $\boxed{R - r = \frac{R}{1+\sin\pi/n}}$

- si $n = 4$ on a $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $r = \frac{R\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2} = \frac{R\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = R(\sqrt{2}-1)$ qui se construit aisément

- si $n = 5$ on a $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

- si $n = 6$ on a $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$r = \frac{R\,1/2}{1+1/2} = \frac{R}{3}$ et $R - r = \frac{2R}{3}$