

551-2 Une rosace trilobée

On inscrit dans le cercle \mathcal{C} un triangle équilatéral ABC dont les sommets sont les points de contact du cercle \mathcal{C} avec les trois petits cercles.

Soient R le rayon de \mathcal{C} et D la longueur des côtés du triangle ABC. Alors : $D = R \cdot \sqrt{3}$

Soient A', B', C' les centres des petits cercles tangents à \mathcal{C} en A, B, C respectivement.

Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par une homothétie h, de centre le centre O du triangle ABC, de rapport k à déterminer.

Pour le triangle A'B'C', on note ρ le rayon de son cercle circonscrit et δ la longueur de ses côtés.

Soit r le rayon des trois petits cercles.

$$\text{Alors : } \begin{cases} \delta = \rho \cdot \sqrt{3} \\ \delta = 2r \\ R = \rho + r \end{cases}$$

$$\text{On en déduit : } \frac{1}{k} = \frac{R}{\rho} = 1 + \frac{r}{\rho} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\rho} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le rapport k est constructible à la règle et au compas.

Donc le triangle A'B'C' est constructible à partir du triangle ABC.