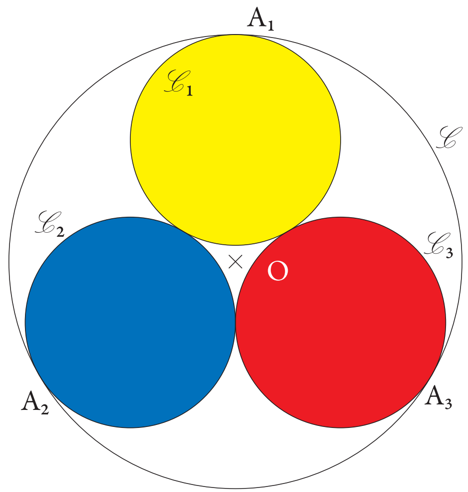
Problème 551 - 2

Énoncé : soit $\mathscr{C}$ un cercle, construire trois cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de même rayon, tangents entre eux et tangents à $\mathscr{C}$.

Préalables

1. Figure complétée



O est le centre du cercle $\mathscr{C}$, A_1, A_2 et A_3 sont les points de tangence des cercles cherchés avec le cercle $\mathscr{C}$. À noter que les petits disques ne sont pas numérotés comme ce qui était proposé, ce qui ne change rien au problème.

2. Quelques remarques

Ce qui suit n'est que partiellement démontré en ce sens que les affirmations reposent toutes sans exception sur des propriétés de symétrie des cercles ou des triangles équilatéraux ou des hexagones sous-jacents.

Le centre du cercle $\mathscr{C}_1$ (resp. $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$) se trouve sur la droite (OA_1) (resp. (OA_2) et (OA_3)).

Par ailleurs, ces centres se trouvent sur les médiatrices du triangles $A_1A_2A_3$.

Il s'ensuit, par exemple pour le cercle $\mathscr{C}_1$, que son centre est le point d'intersection du segment $[OA_1]$ et de la bissectrice de l'angle formé par la tangente en A_1 à $\mathscr{C}$ et la médiatrice du segment A_1A_2.

Dans ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, les cercles ont tous le même rayon, celui de $\mathscr{C}$.

3 . Principe de construction

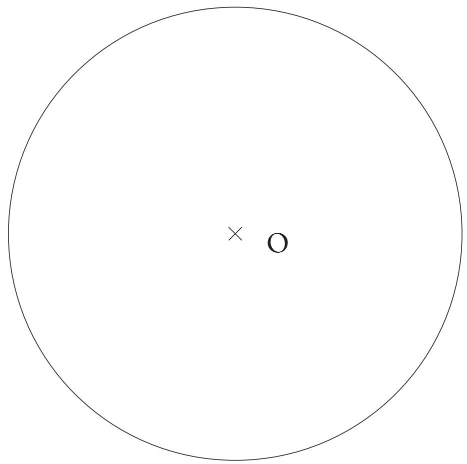
A priori, j'ai en effet choisi de travailler avec un compas à ouverture fixe, celle du cercle $\mathscr{C}$ de l'énoncé, tant que c'était possible. Vu la taille des cercles cherchés, il est évident que ce choix serait provisoire mais je l'ai maintenu le plus longtemps possible.

Il est possible que ce choix ait allongé la construction.

4 . Complément

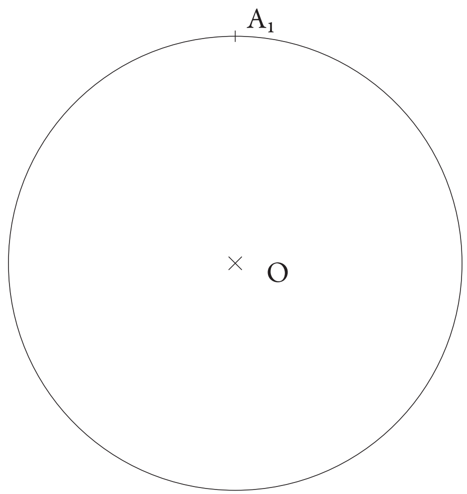
Si l'on choisit le rayon du cercle $\mathscr{C}$ comme unité, le rayon commun aux trois cercles cherchés est $2\sqrt{3}-3$.

Étape 1



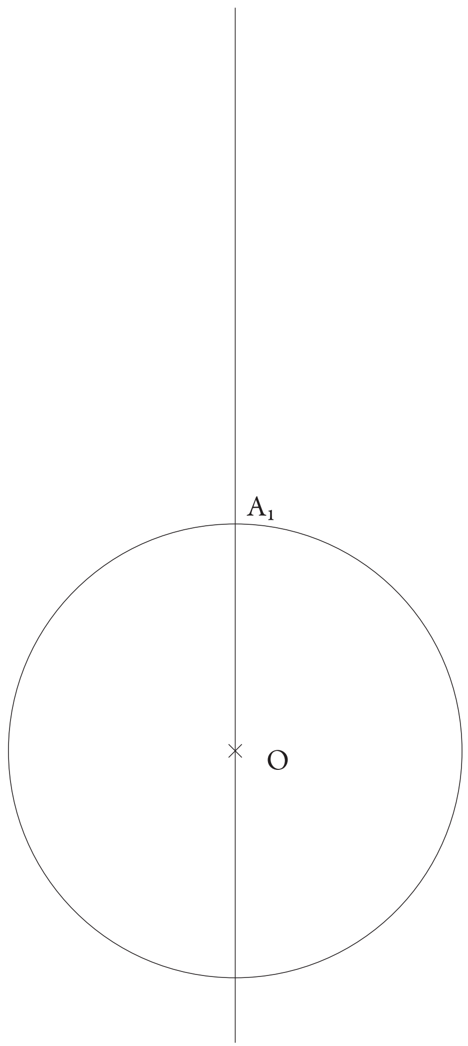
Soit O le centre du cercle donné $\mathscr{C}$.

Étape 2



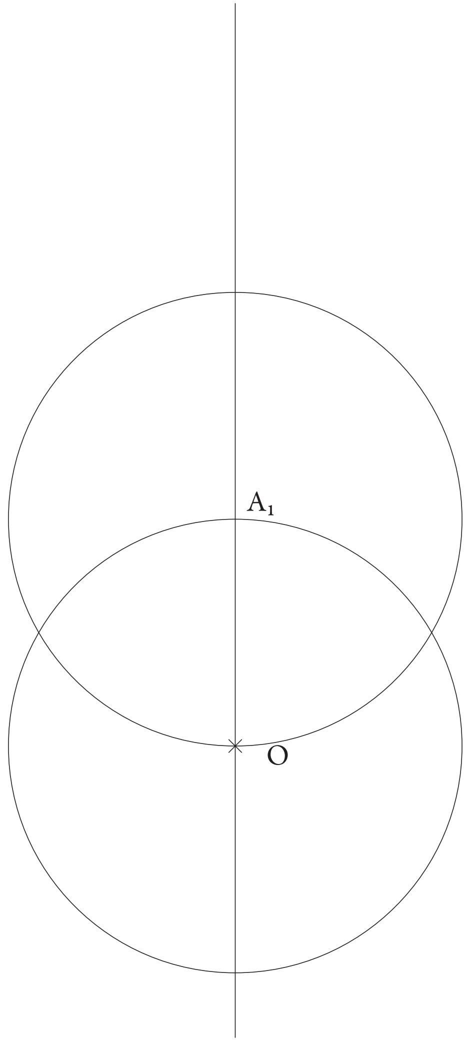
Soit A_1 un point de $\mathscr{C}$.

Étape 3



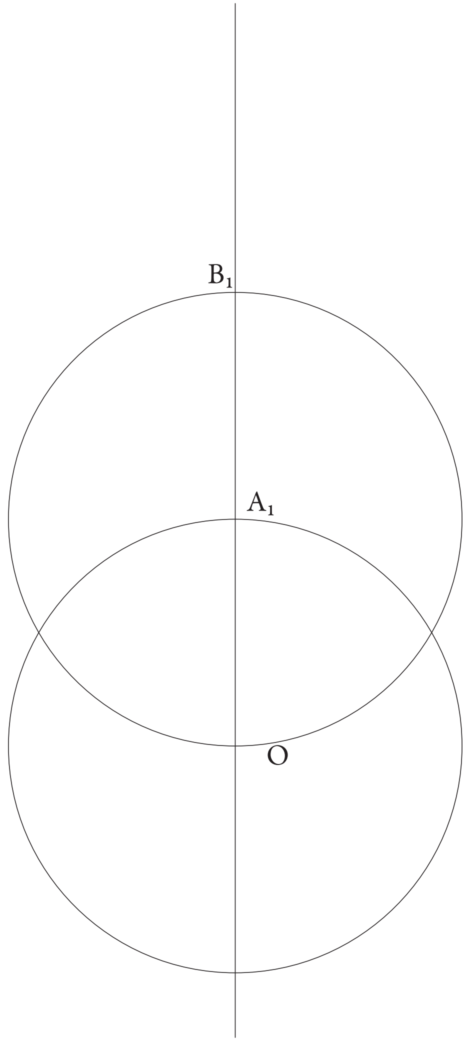
Tracer la droite (OA_1).

Étape 4



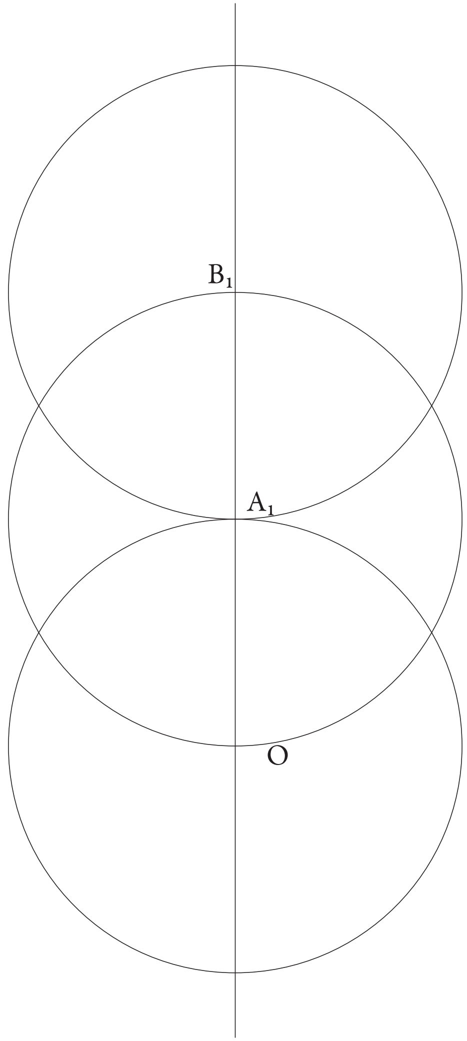
Tracer le cercle de centre A_1 .

Étape 5



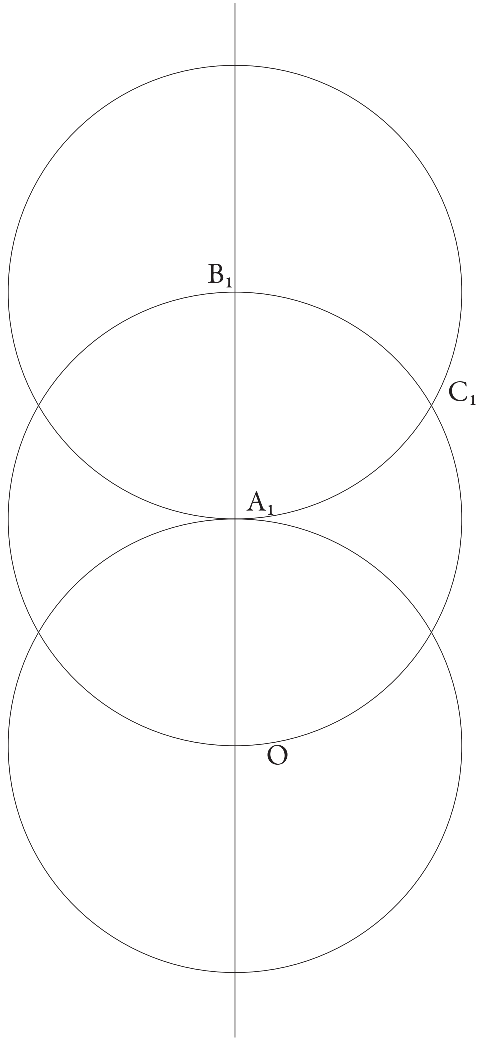
Soit B_1 le point d'intersection de la droite (OA_1) et du cercle de centre A_1 autre que O.

Étape 6



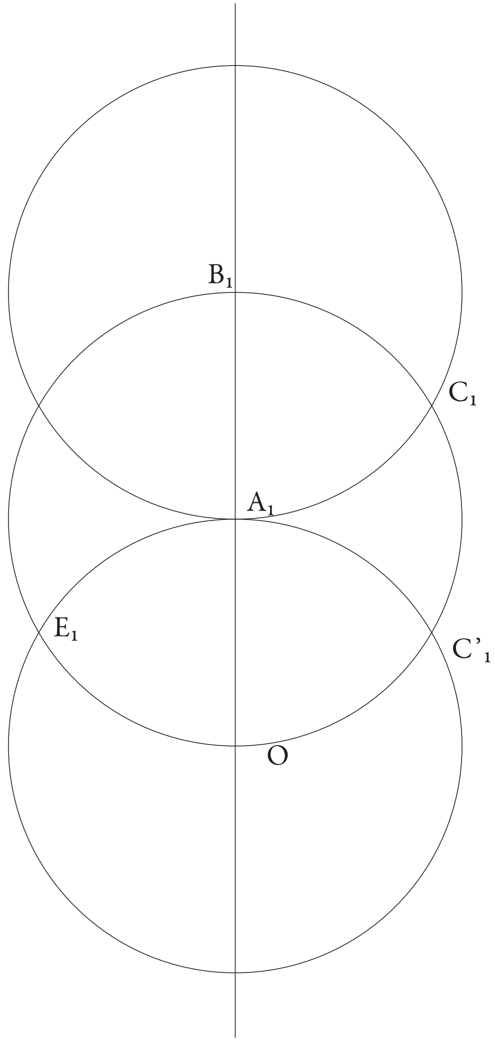
Tracer le cercle de centre B_1.

Étape 7



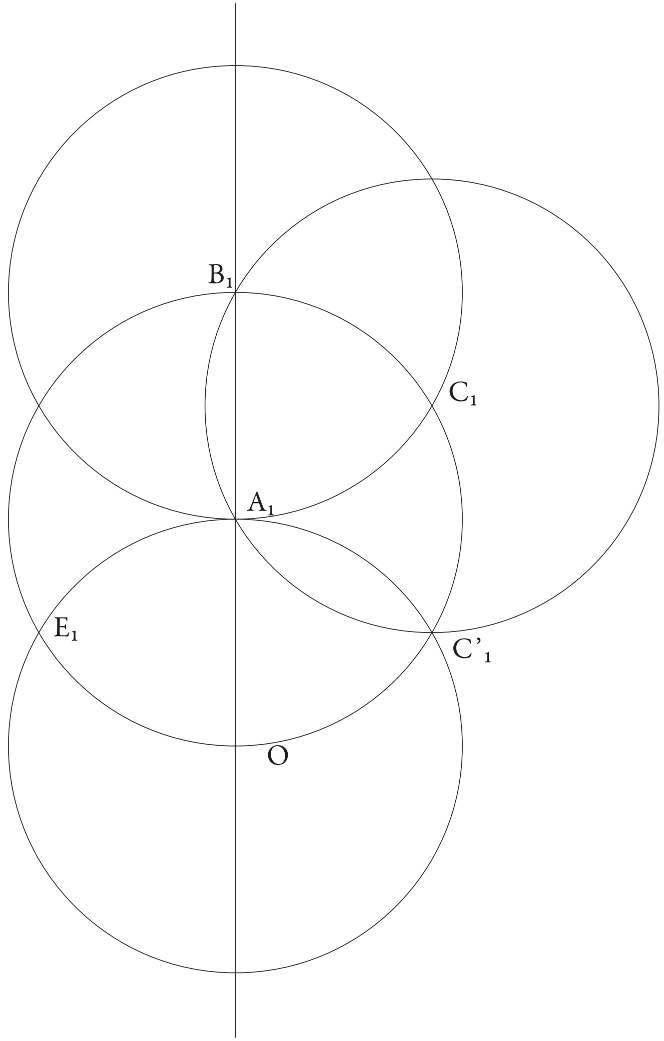
Les cercles de centres A_1 et B_1 se coupent en C_1, placé comme sur la figure.

Étape 8



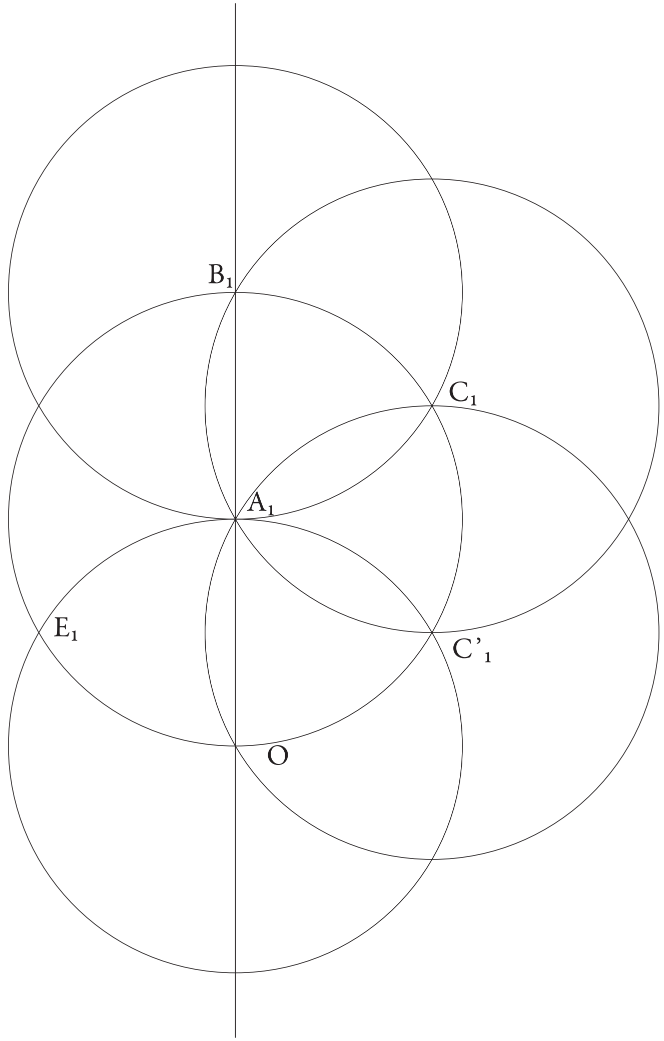
Les cercles de centres O et A_1 se coupent en C'_1 et en E_1, placés comme sur la figure.

Étape 9



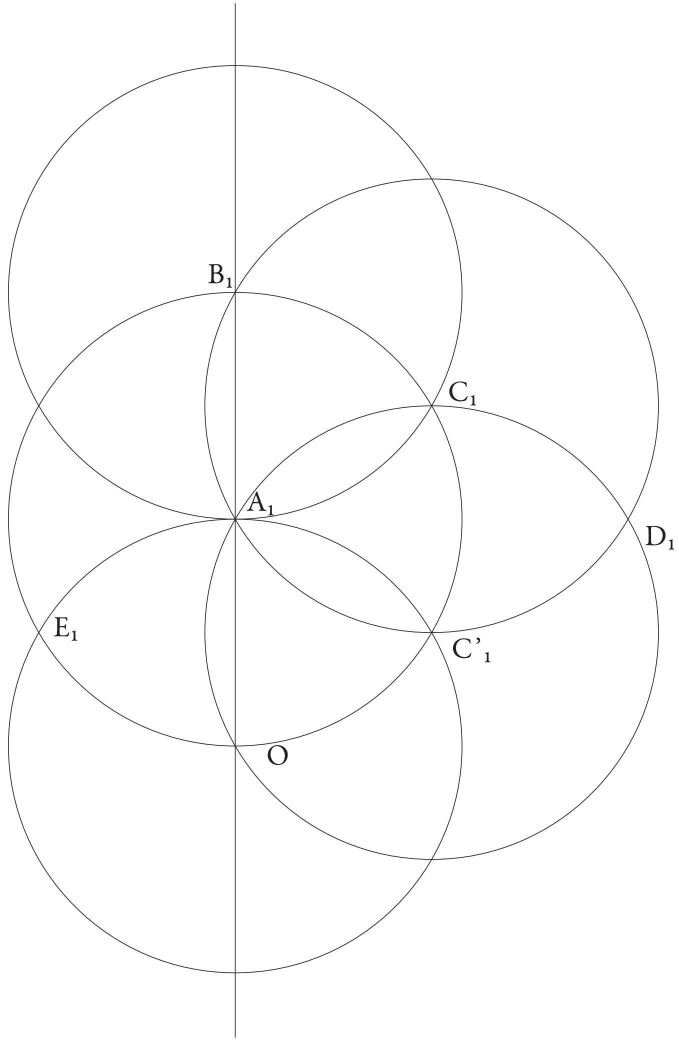
Tracer le cercle de centre C_1.

Étape 10



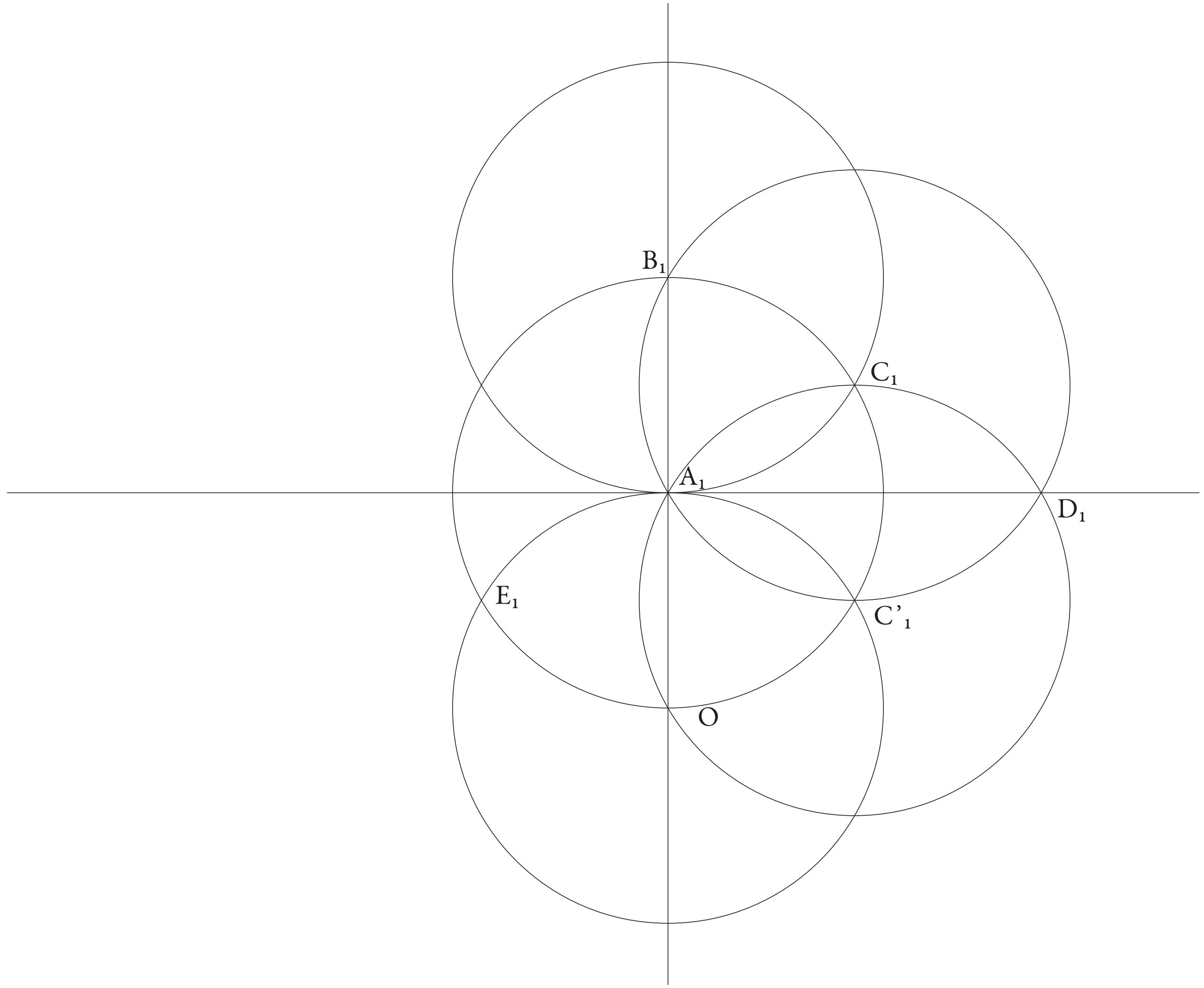
Tracer le cercle de centre C'_1 .

Étape 11



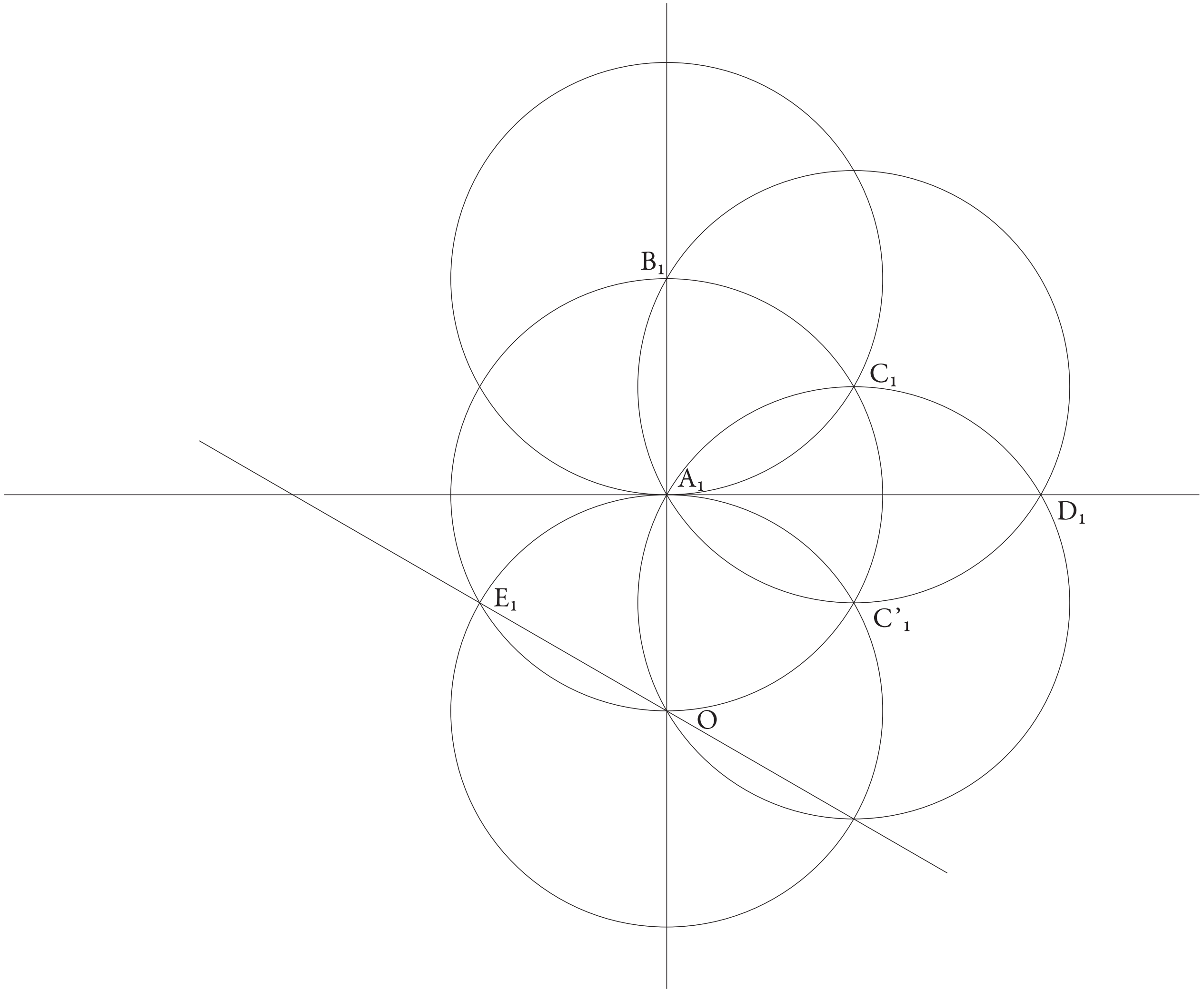
Les cercles de centres C_1 et C'_1 se coupent en D_1, distinct de A_1.

Étape 12



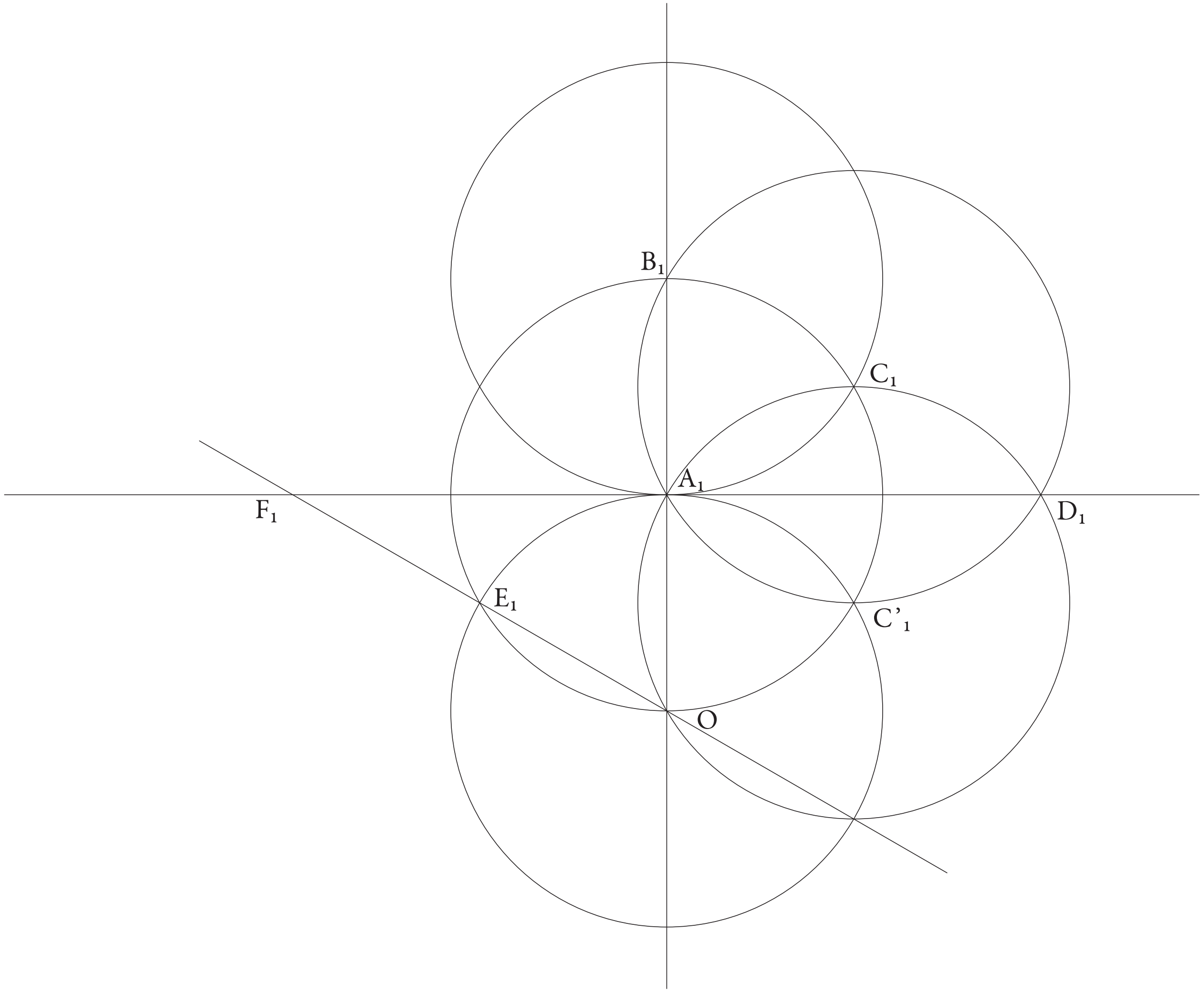
Tracer la droite (A_1D_1), c'est la tangente à $\mathscr{C}$ en A_1.

Étape 13



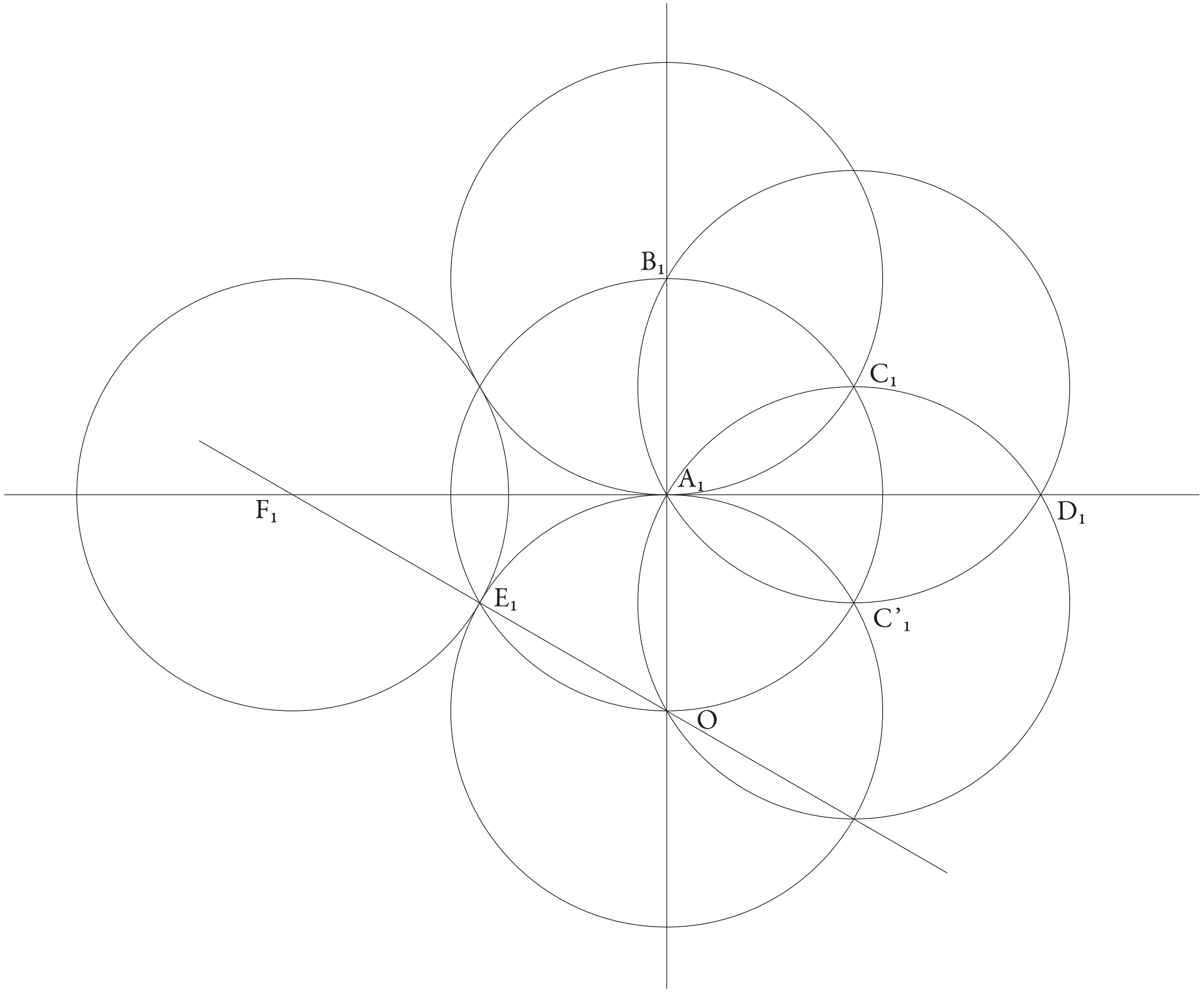
Tracer la droite (OE_1). C'est la médiatrice du segment $[A_1A_2]$, A_2 sera introduit plus loin.

Étape 14



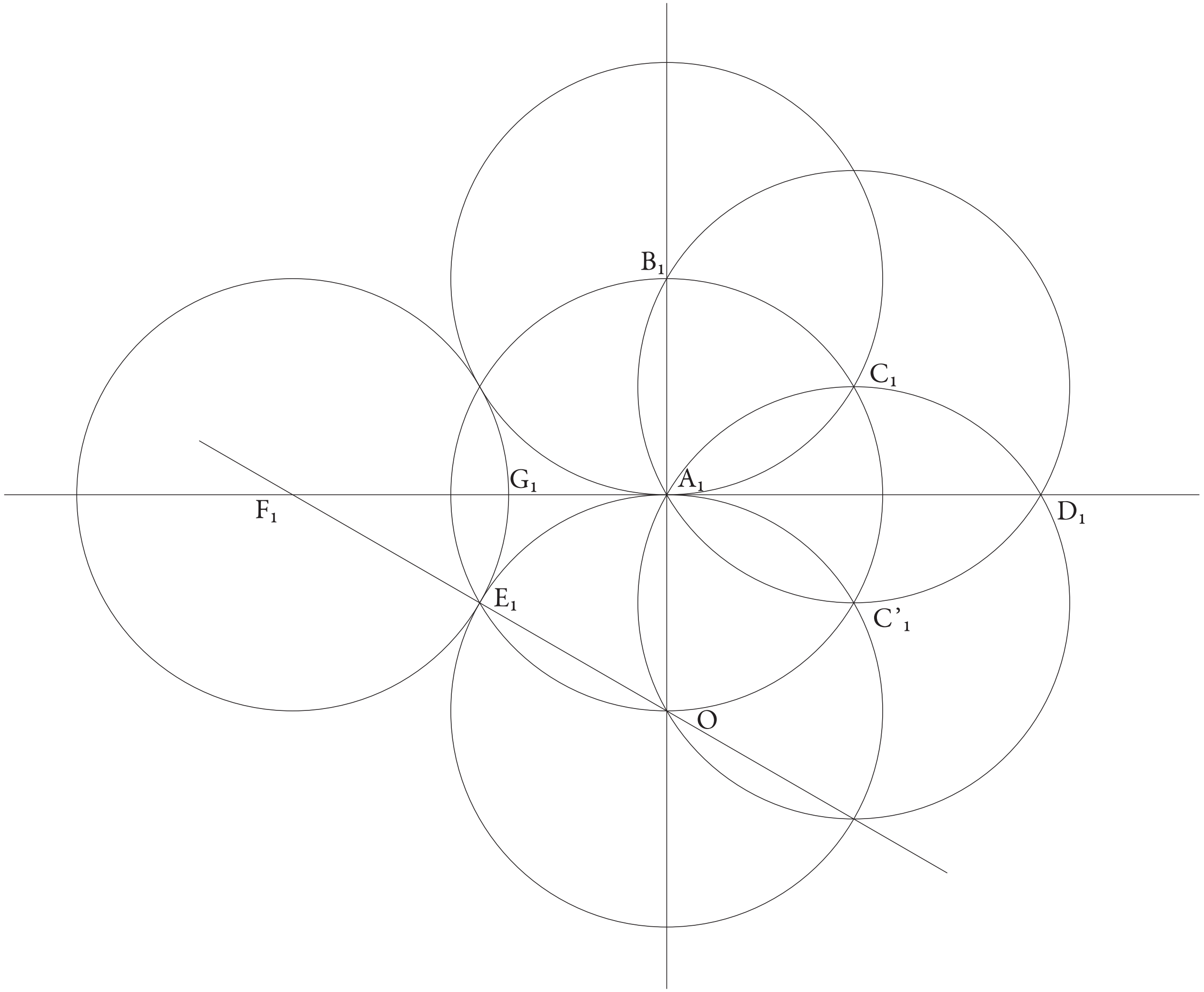
Soit F_1 le point d'intersection des droites (A_1D_1) et (OE_1).

Étape 15



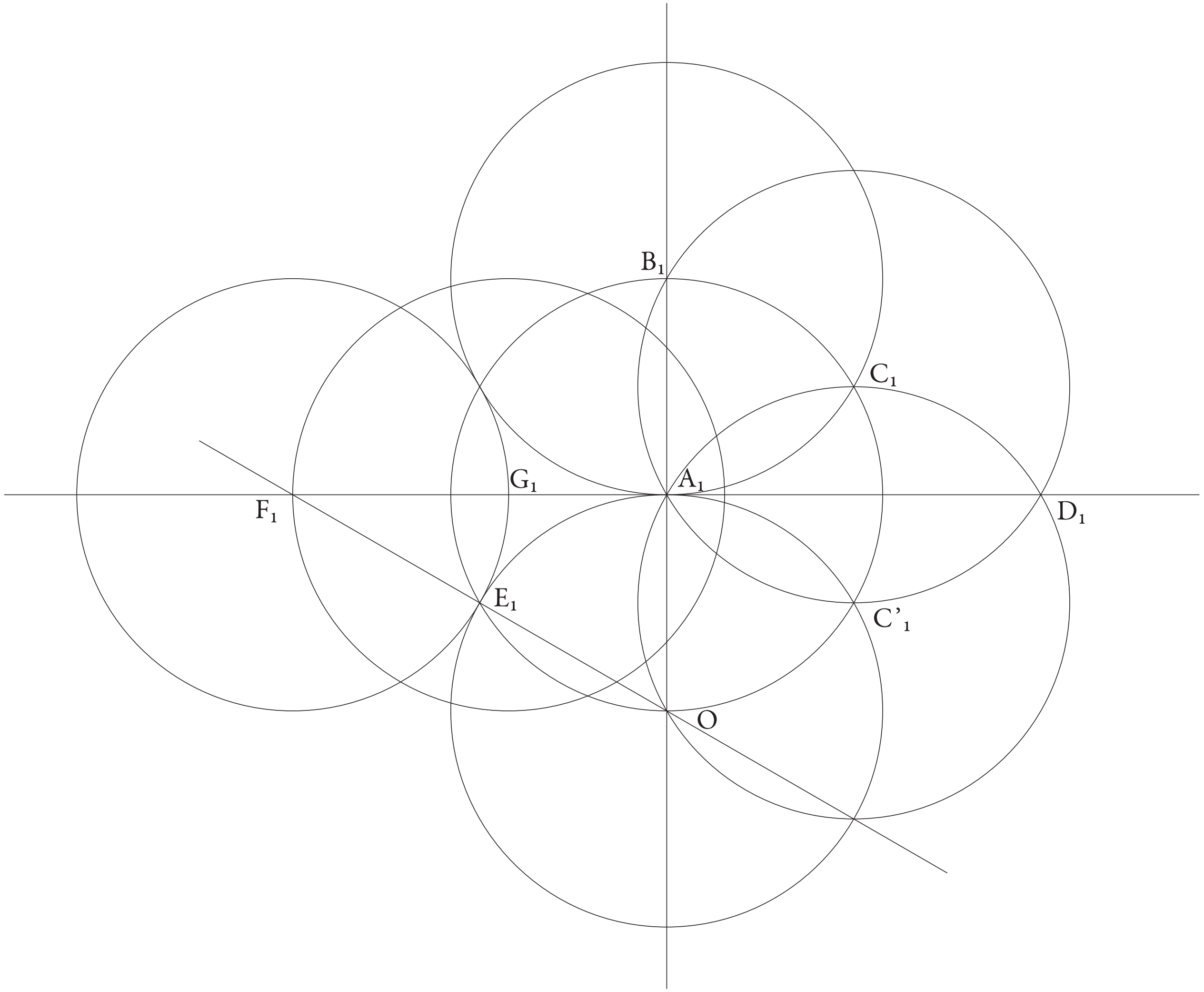
Tracer le cercle de centre F_1.

Étape 16



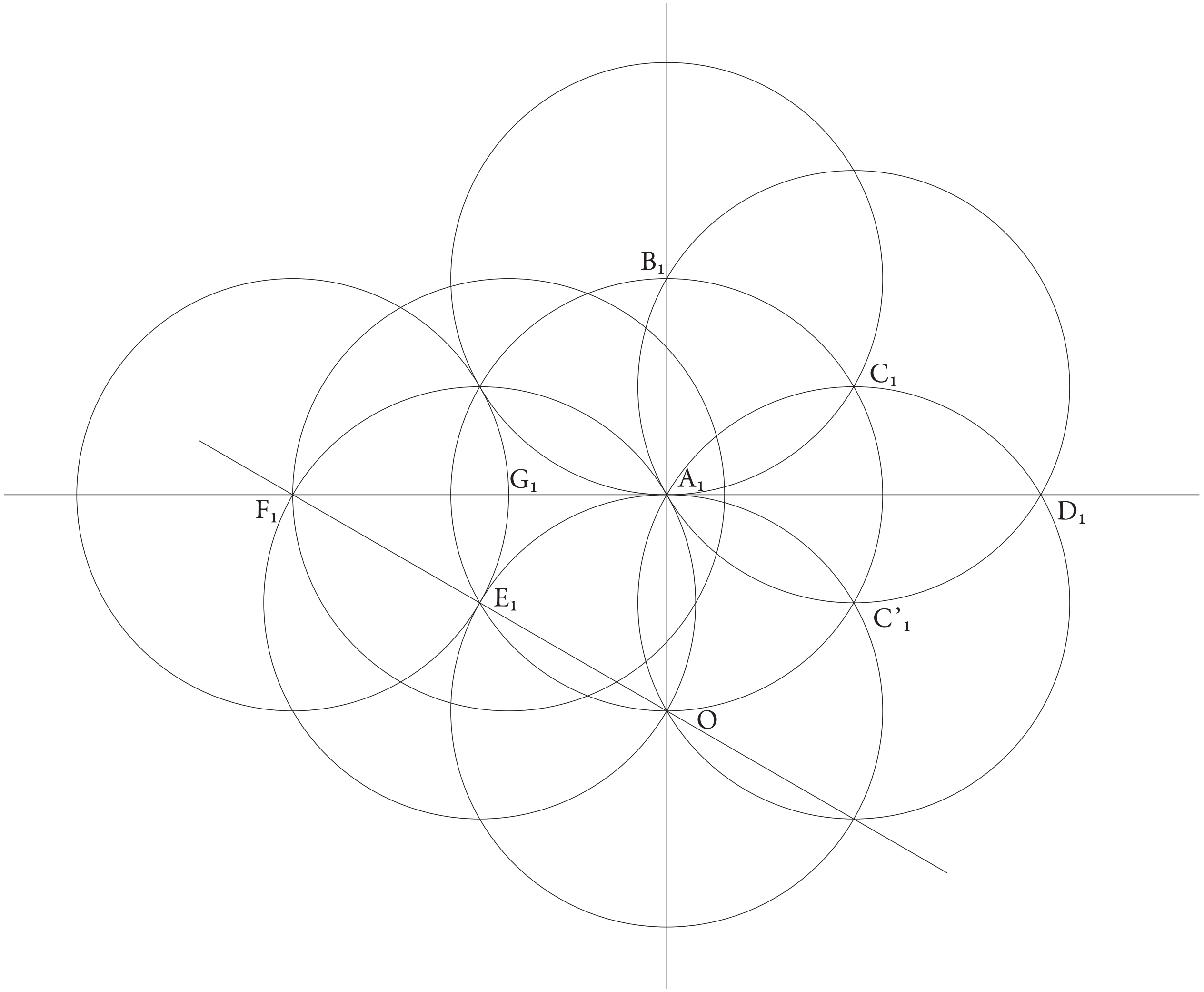
Le cercle de centre F_1 coupe la droite (A_1D_1) en G_1 placé comme sur la figure.

Étape 17



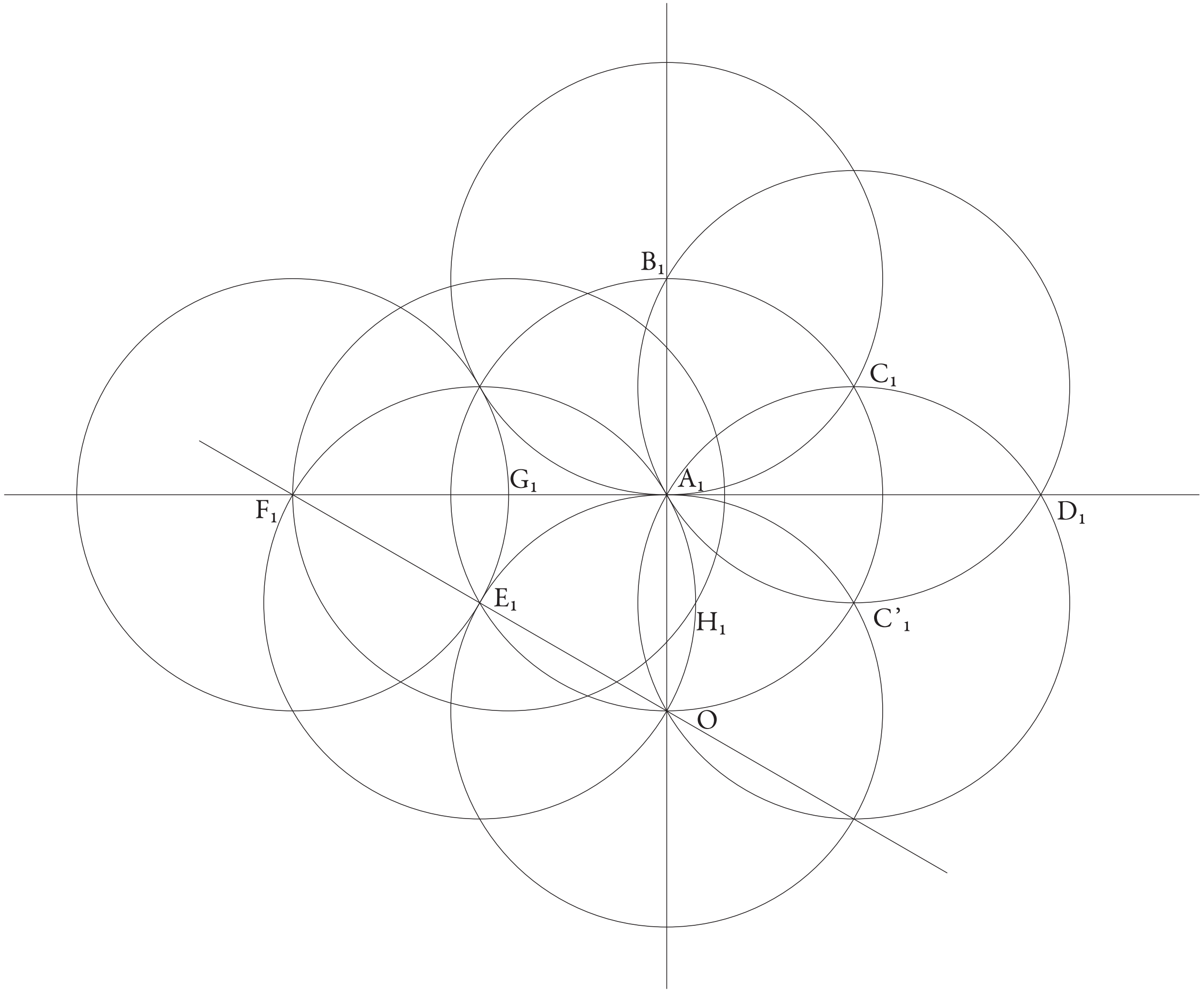
Tracer le cercle de centre G_1 .

Étape 18



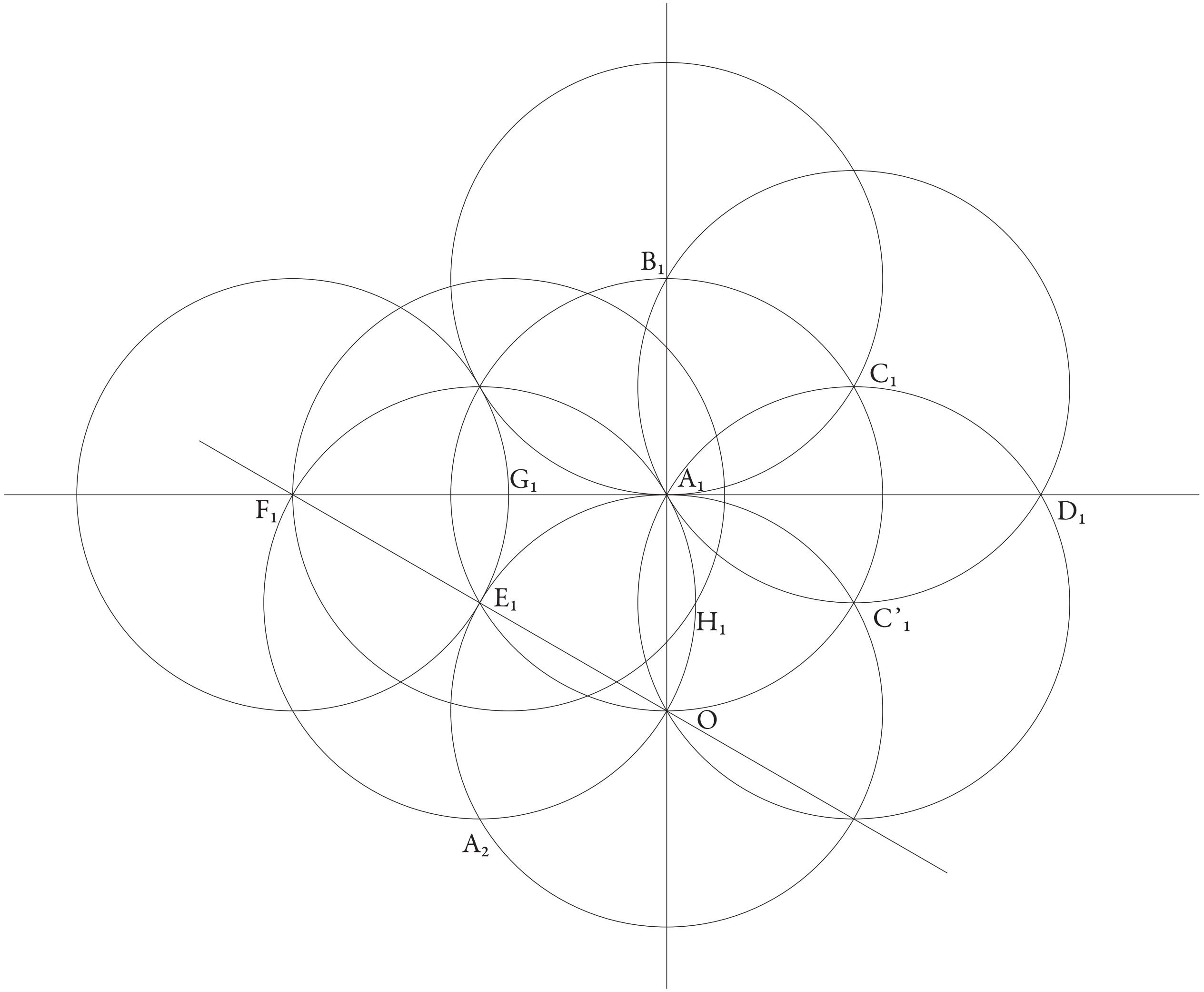
Tracer le cercle de centre E_1 .

Étape 19



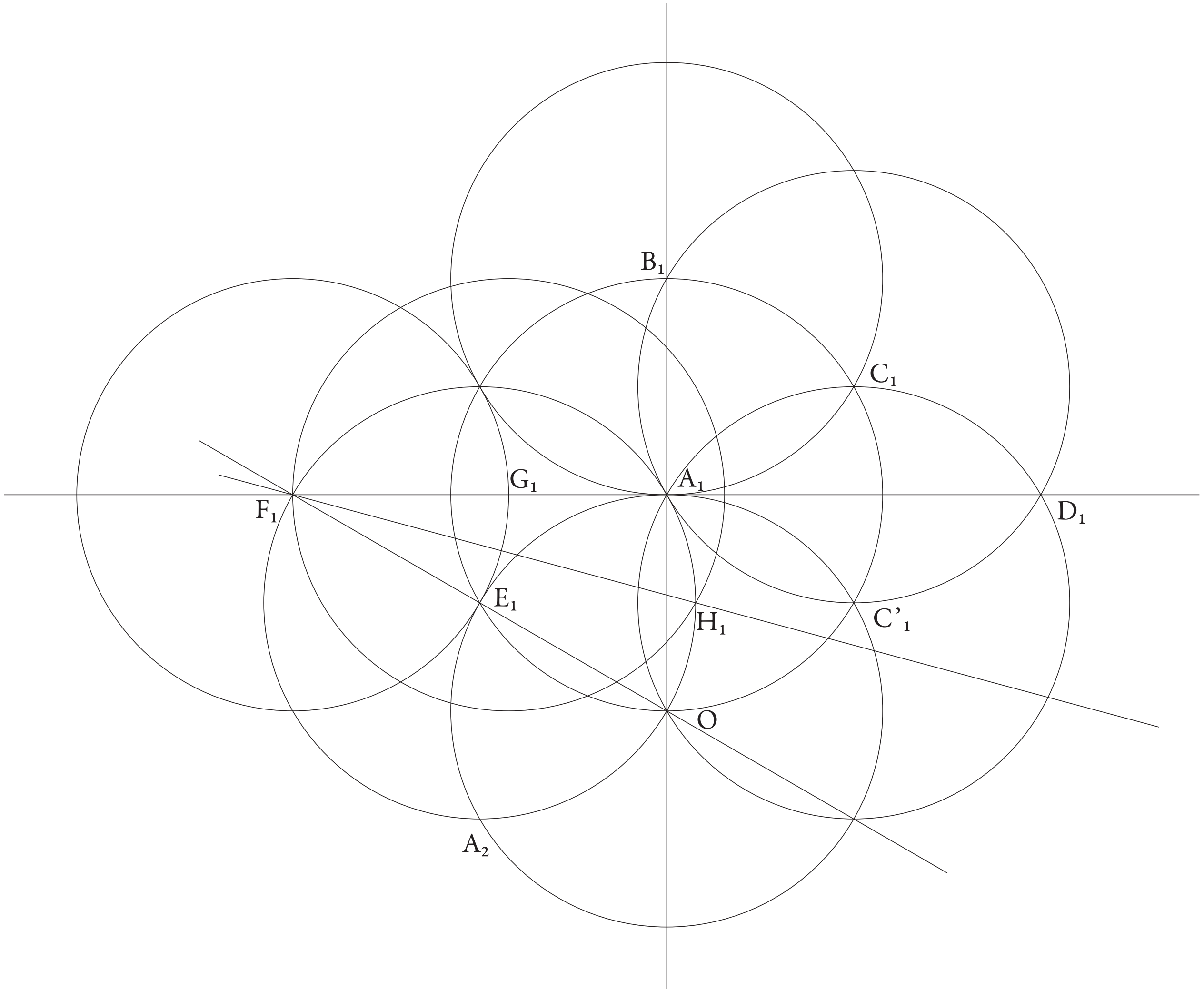
Les cercles de centres G_1 et E_1 se coupent en H_1, distinct de F_1.

Étape 20



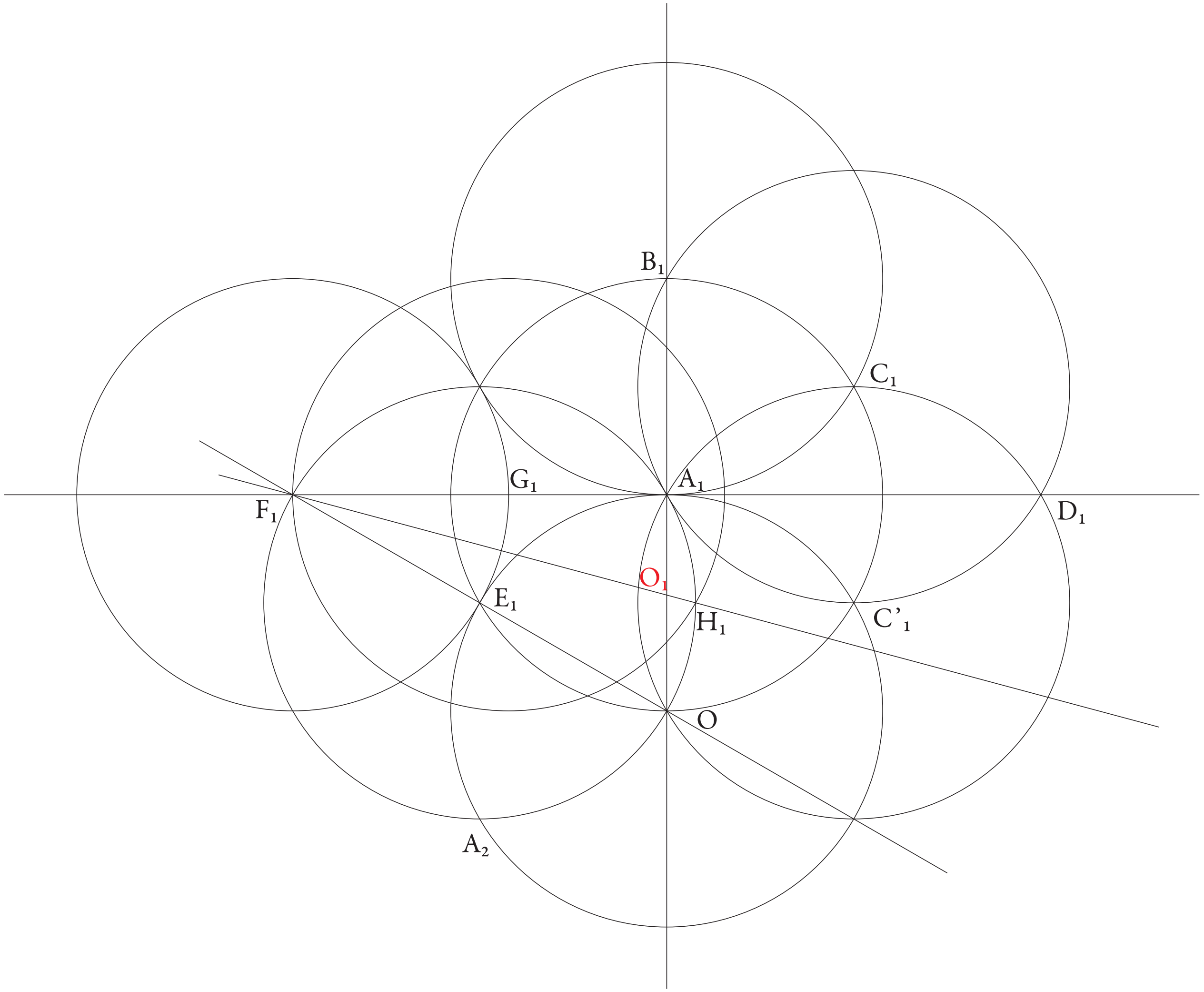
Les cercles de centres E_1 et O se coupent en A_2, distinct de A_1.

Étape 21



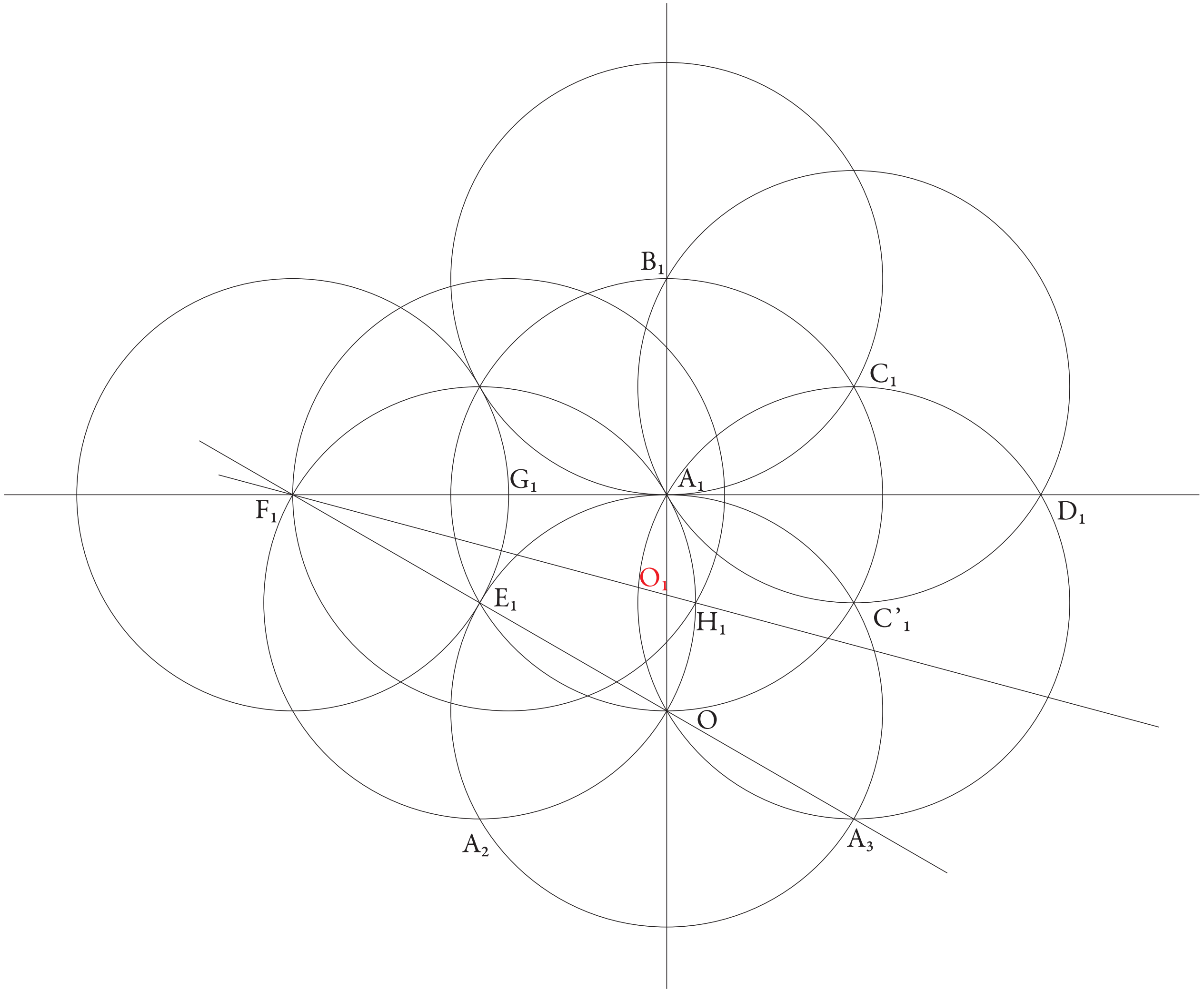
Tracer le droite (F_1H_1).

Étape 22



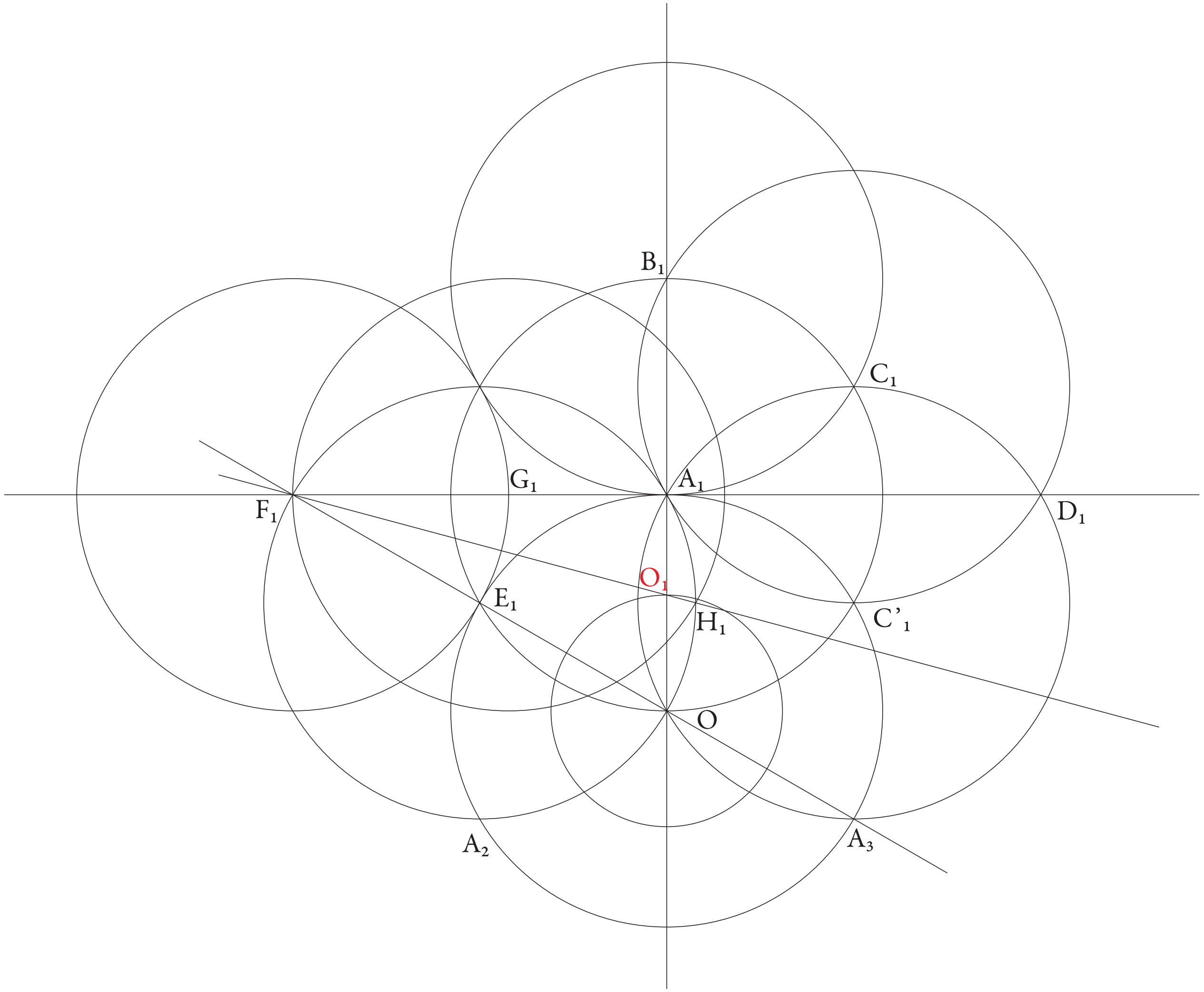
Cette droite coupe la droite (OA_1) en O_1, centre d'un des trois cercles cherchés.

Étape 23



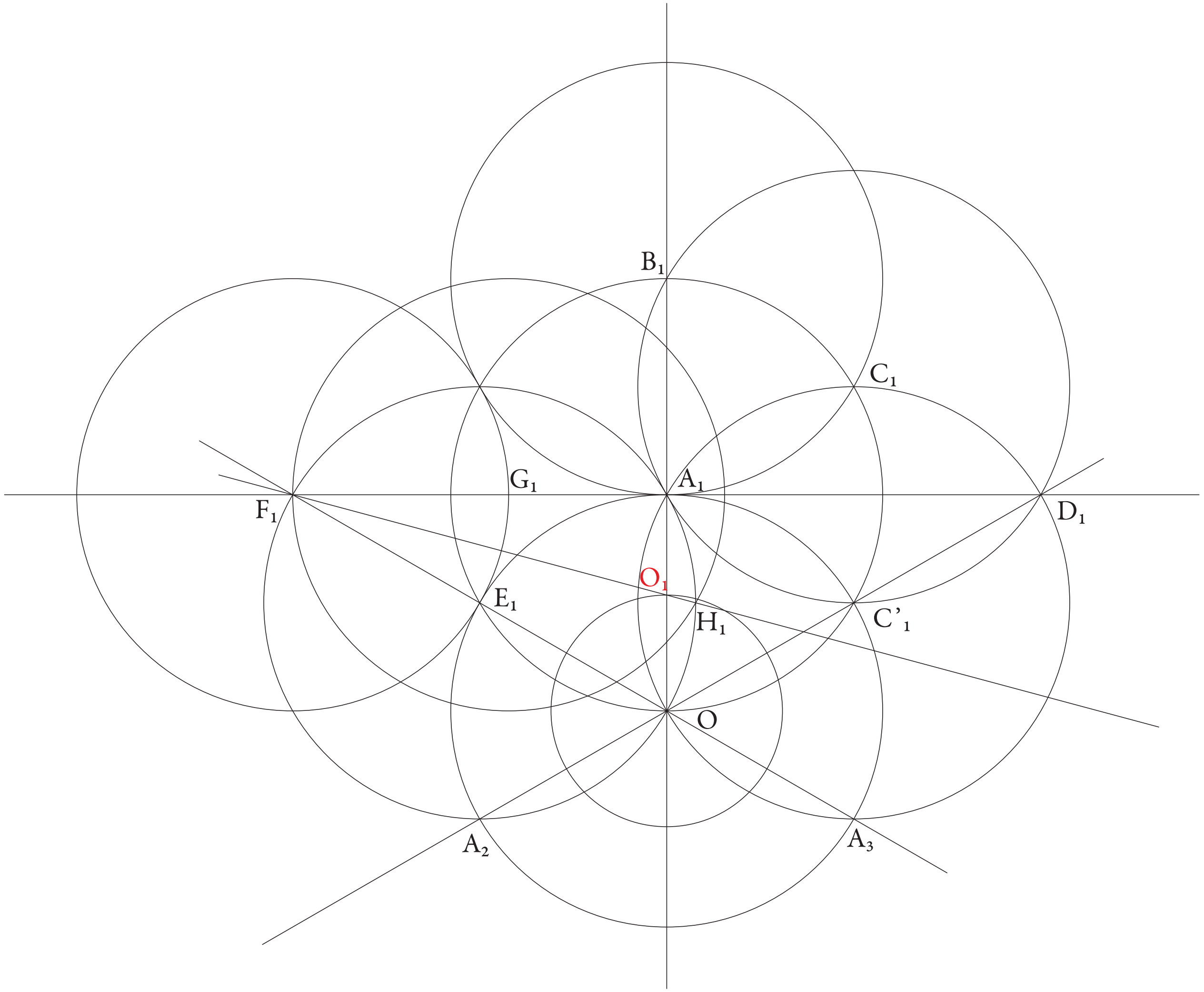
La droite (OE_1) recoupe le cercle de centre O en A_3.

Étape 24



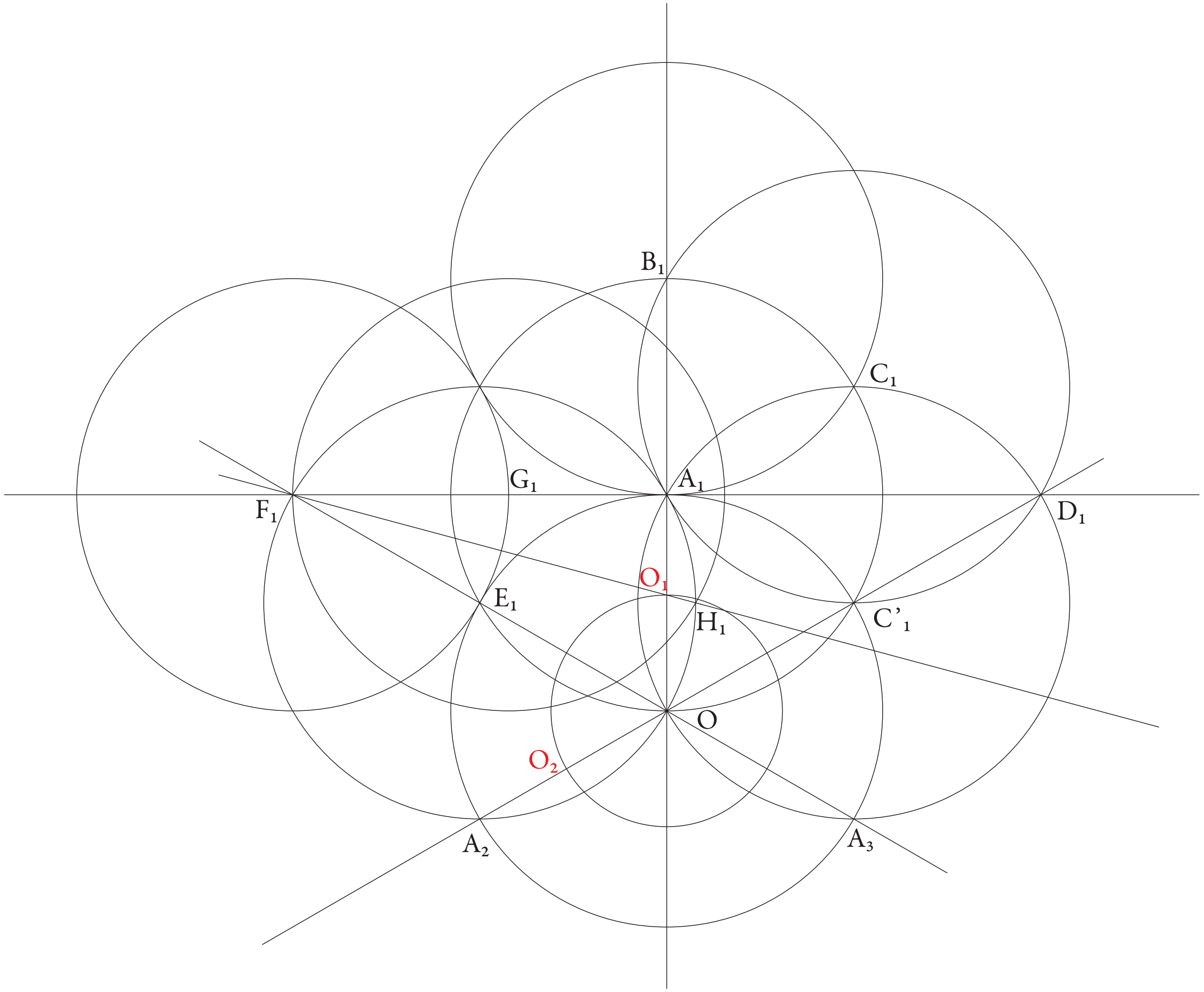
Tracer le cercle de centre O passant par O_1 .

Étape 25



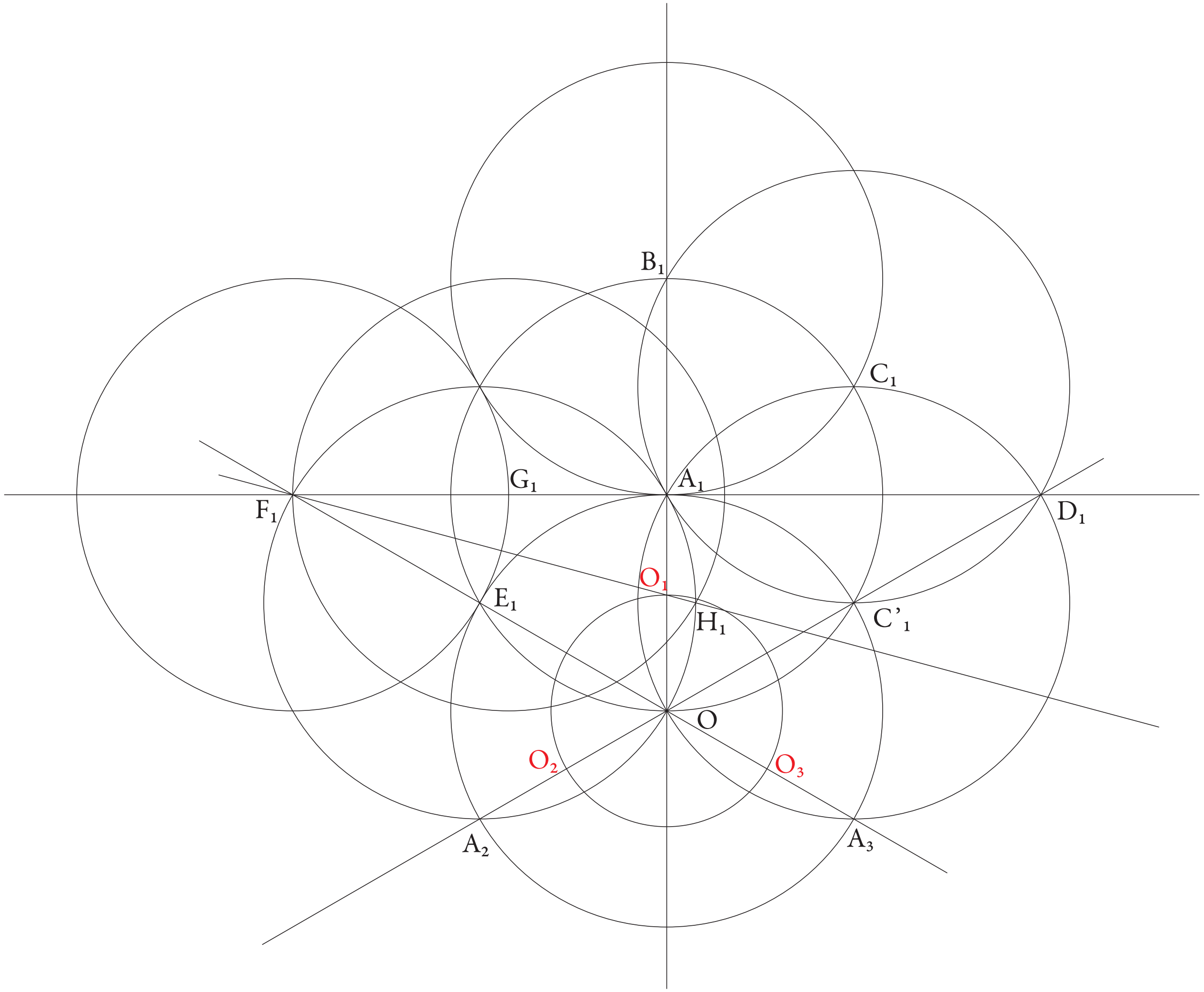
Tracer la droite (OD_1).

Étape 26



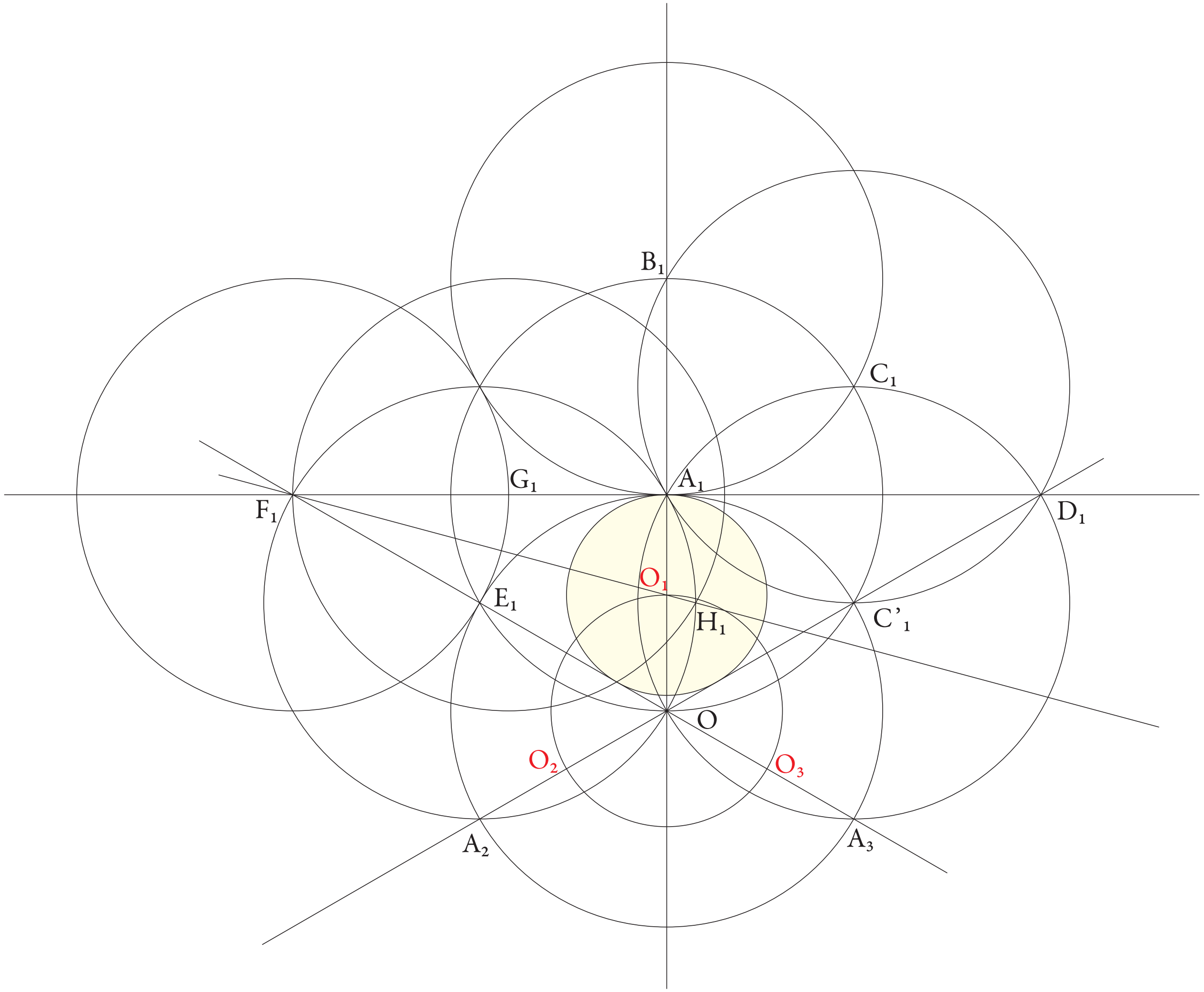
Elle coupe le cercle de centre O passant par O_1 en O_2, centre d'un deuxième cercle cherché.

Étape 27



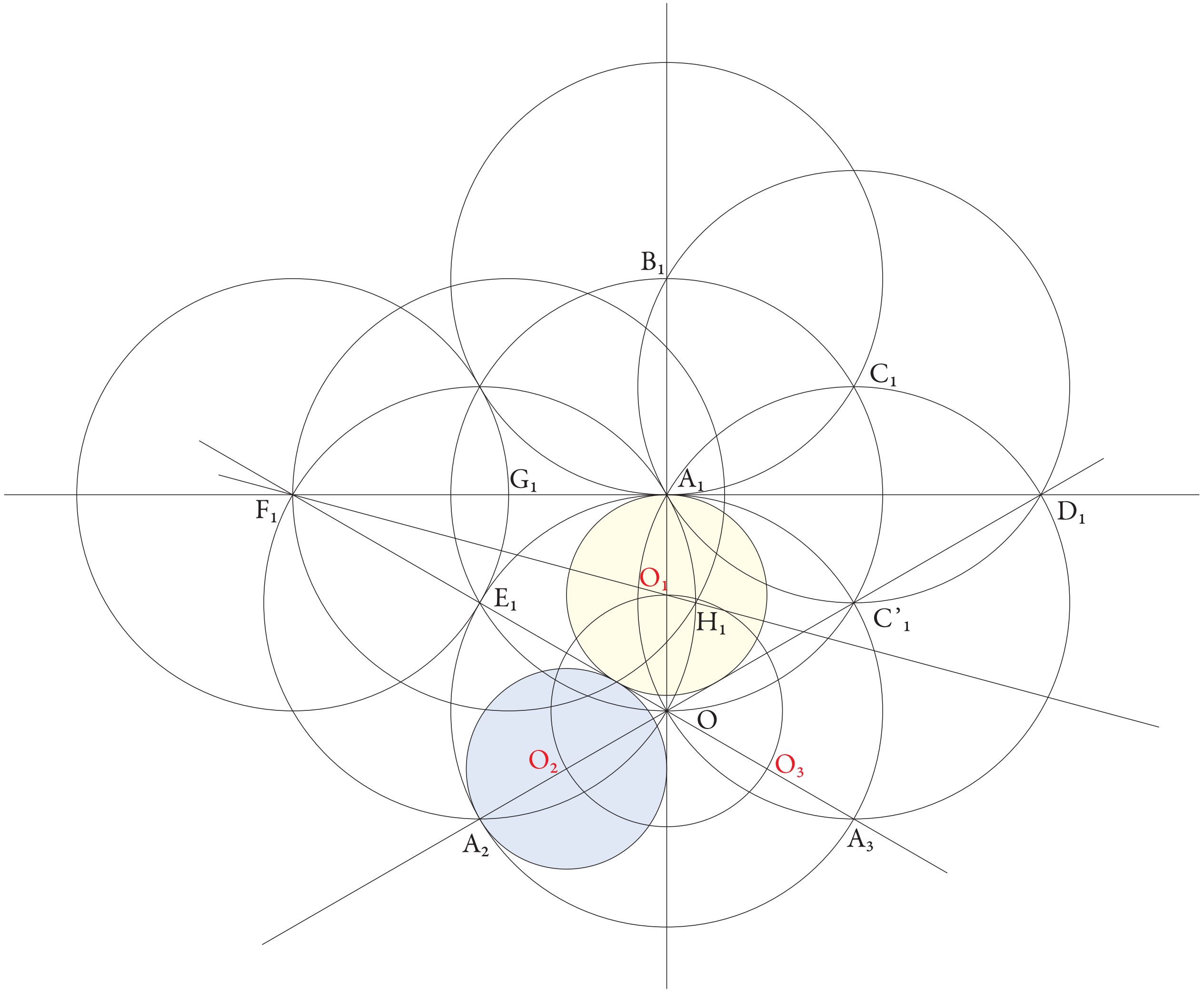
La droite (OE_1) coupe le cercle de centre O passant par O_1 en O_3, placé comme sur la figure ; c'est le centre du dernier des cercles cherchés.

Étape 28



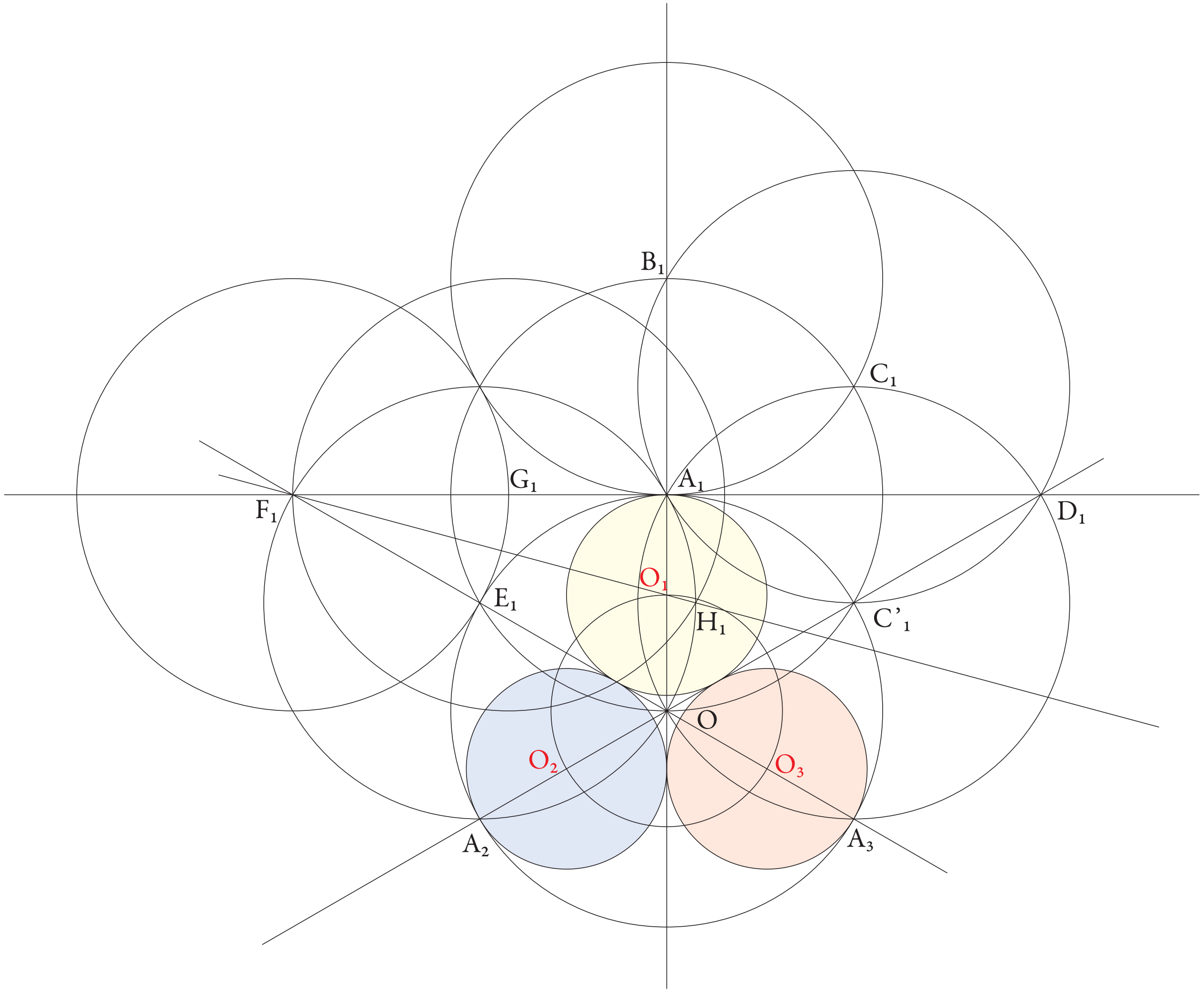
Tracer le cercle de centre O_1 passant par A_1 .

Étape 29



Tracer le cercle de centre O_2 passant par A_2 .

Étape 30



Tracer le cercle de centre O_3 passant par A_3.

Étape 31

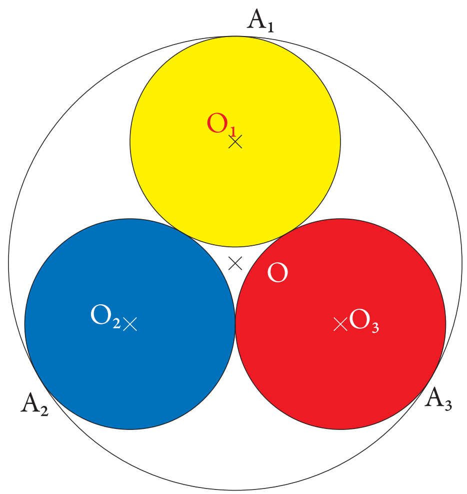


Figure finale.

Remarque : si, au lieu de tracer la bissectrice intérieure de l'angle en F_1 dans la triangle OA_1F_1, on choisit la bissectrice extérieure et que l'on poursuit la construction dans le même sens que ce qui précède, on trouve les trois (très) grands cercles extérieurs au cercle $\mathscr{C}$ qui répondent à la question.