

551-4 Bonne année (Vincent Thill - Migennes)

Résoudre en nombres entiers $ab + c = 2023$ et $a + bc = 2024$.

Solution proposée par Daniel Văcaru, Pitești, Roumanie

On a

$$(a + c)(b + 1) = 4047 \quad (1)$$

et

$$(b - 1)(c - a) = 1 \quad (2)$$

Il suit que $\begin{cases} b - 1 = 1 \\ c - a = 1 \end{cases}$ or $\begin{cases} b - 1 = 1 \\ c - a = 1 \end{cases}$. Mais $b - 1 - 1b$ equivaut avec $b = 0$.

On obtient $c = 2023$ et $a = 2024$. On a $b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = 2$. Alors (1) devient

$$(a + c)3 = 4047 \quad (3)$$

d'où $a + c = 1349$. On obtient le systeme

$$\begin{cases} a + c = 1349 & (4) \\ c - a = 1 & (5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 1350 \\ c - a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 675 \\ a = 674 \end{cases}.$$

On a

$$(a; b; c) \in \{(2024; 0; 2023); (674; 2; 675)\}$$