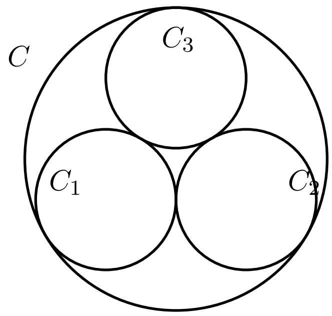
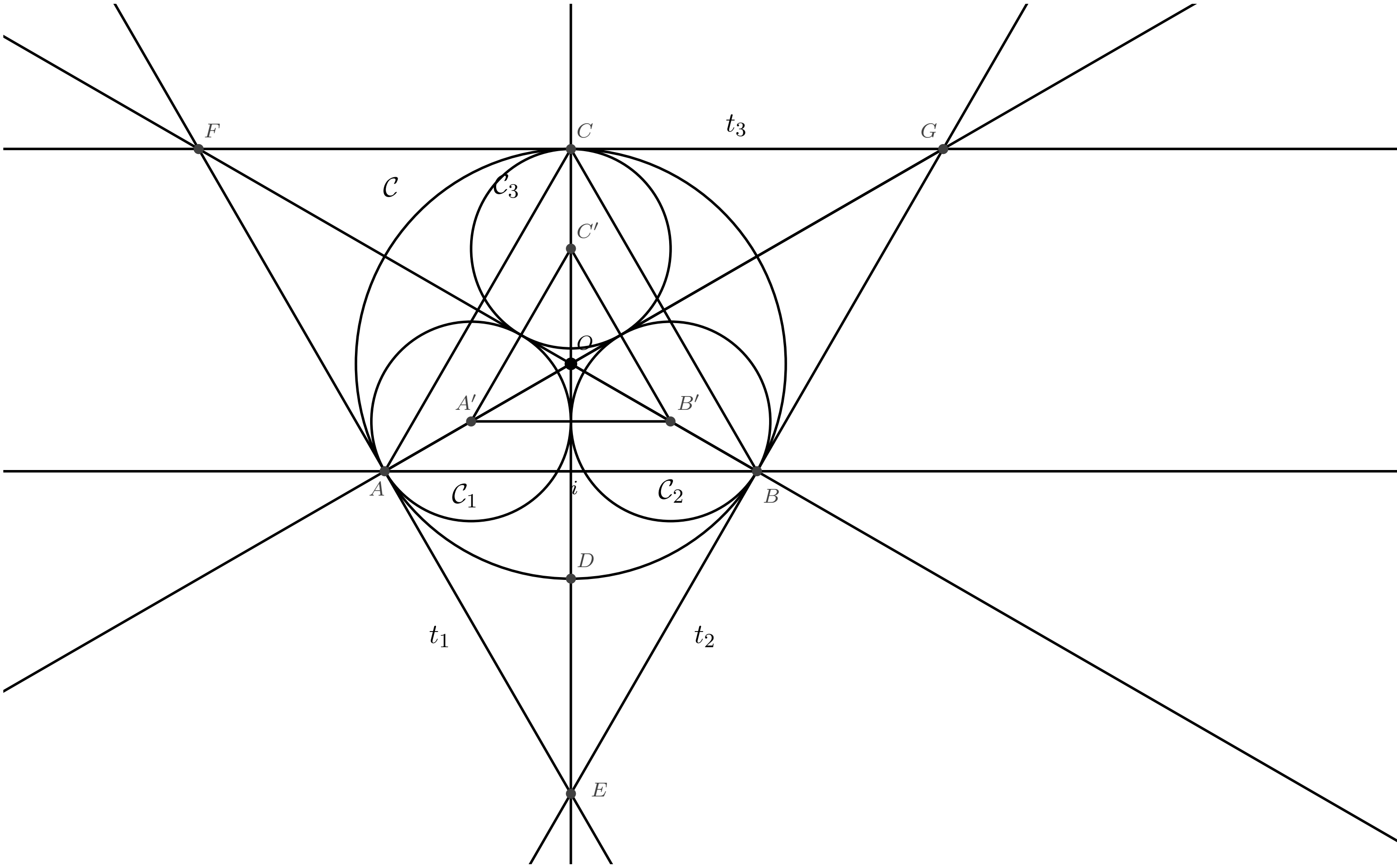
551-2 Une rosace trilobée (Serge Parpay-Niort)



Soit un cercle $\mathcal{C}$, il s'agit de construire
à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$, 3 cercles de même rayon ,
tangents entre eux et tangents au cercle $\mathcal{C}$.

Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$, A' , B' et C' les centres respectifs des cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ et A , B et C les points de contact du cercle $\mathcal{C}$ respectivement avec les cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
On déduit que les points O , A et A' sont alignés , ainsi que les points O,B et B' et que les point O,C et C' .
Le triangle A'B'C' est équilatéral car $A'B' = B'C' = C'A' = 2r$ en notant r le rayon des petits cercles.

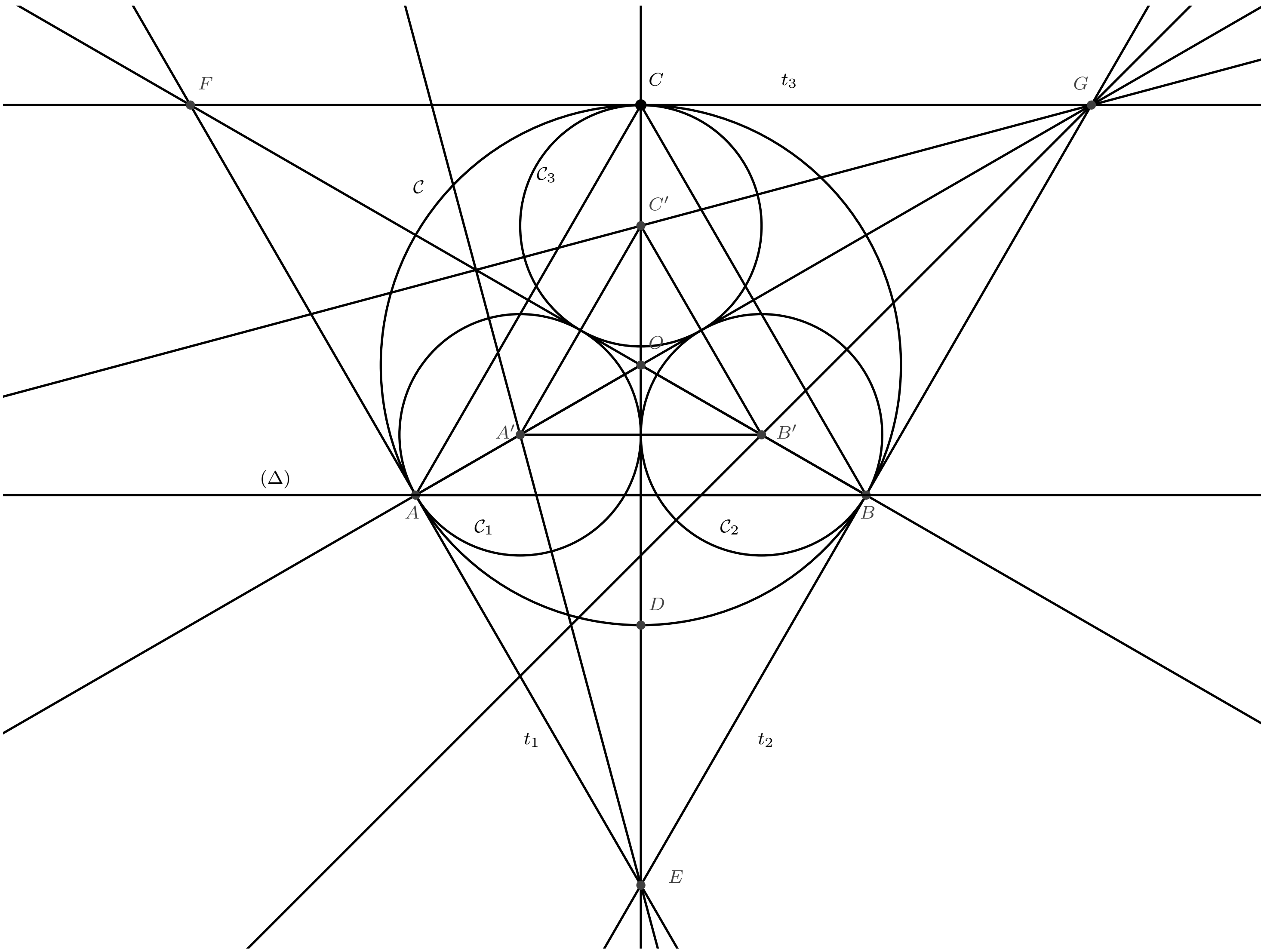
Comme les points O , A et A' sont alignés , ainsi que les points O,B et B' et que les point O,C et C' et que $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$, les triangles A'B'C' et ABC sont homothétiques .
Comme le triangle A'B'C' est équilatéral , le triangle ABC est un triangle équilatéral.



Notons t_1 la tangente commune aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ au point A , t_2 la tangente commune aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2$ au point B et t_3 la tangente commune aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_3$ au point C .
Les droites t_1 et t_2 se coupent en un point E , les droites t_1 et t_3 se coupent en un point F et les droites t_2 et t_3 se coupent en un point G.

Les droites (OA') , (OB') et (OC') sont les médiatrices du triangle FGH .
Il résulte que le triangle EFG est un triangle équilatéral.

Le cercle $\mathcal{C}_1$ est le cercle inscrit au triangle OEF .son centre A' est le point de concours des bissectrices des angles du triangle OEF, le cercle $\mathcal{C}_2$ est le cercle inscrit au triangle OEG ,son centre B' est le point de concours des bissectrices des angles du triangle OEG et le cercle $\mathcal{C}_3$ est le cercle inscrit au triangle OFG ,son centre C' est le point de concours des bissectrices des angles du triangle OFG .



Construction des 3 cercles

1°) On trace un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un diamètre $[CD]$

2°) On construit un triangle équilatéral ABC , en traçant la médiatrice du segment $[OD]$, notée (Δ).
(Δ) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B tels que ABC est un triangle équilatéral.

3°) On trace les 3 tangentes t_1 , t_2 et t_3 au cercle $\mathcal{C}$ respectivement en A , en B et en C .
Ces 3 tangentes forment un triangle équilatéral EFG ,où

E est point d'intersection de t_1 et t_2 , F est point d'intersection de t_3 et t_1 et
G est point d'intersection de t_3 et T_2
Le cercle $\mathcal{C}_1$ est le cercle inscrit au triangle OEF
Son centre A' est le point d'intersection des bissectrices de ce triangle.
Pour construire le point A', puis le cercle $\mathcal{C}_1$, on construit la bissectrice de l'angle $\widehat{FEO}$, elle coupe le segment $[OA]$ en A' . Le cercle $\mathcal{C}_1$ est donc le cercle de centre A' et de rayon $[A'A]$.
On construit le point B' symétrique du point A' par rapport à la droite (OC).
Le cercle $\mathcal{C}_2$ est donc le cercle de centre B' et de rayon $[B'B]$.
de même on construit le point C' symétrique du point B' par rapport à la droite (OA).
Le cercle $\mathcal{C}_3$ est donc le cercle de centre C' et de rayon $[C'C]$.