551-4 Bonne année (Vincent Thill-Migennes

Il faut résoudre en nombres entiers $ab + c = 2023$ et $a + bc = 2024$

Considérons les deux cas $b = 0$ et $b \neq 0$

**1er cas** : $b = 0$ alors on a
$0 + c = 2023$ et $a + 0 = 2024$ d'où la solution $a = 2024$ , $b = 0$ et $c = 2023$.

**2ème cas** : $b \neq 0$
On a alors les équivalences :

$$\begin{cases} ab + c = 2023 \\ a + bc = 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + c = 2023 \\ ab + b^2c = 2024b \end{cases}$$

Par différence on obtient : $b^2c - c = 2024b - 2023$

d'autre part : $\begin{cases} ab + c = 2023 \\ a + bc = 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab^2 + bc = 2023b \\ a + bc = 2024 \end{cases}$

Par différence , on obtient : $ab^2 - a = 2023b - 2024$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} b^2c - c = 2024b - 2023 \\ ab^2 - a = 2023b - 2024 \end{cases}$$

Par différence , on obtient : $b^2(c - a) - c - a) = b + 1$

d'où les égalités suivantes :
$(c - a)(b^2 - 1) = b + 1$
$(c - a)(b - 1)(b + 1) = b + 1$

Il y a deux cas possibles : $b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1$ ou $b + 1 \neq 0$

• $b = -1$ on obtient $-a + c = 2023$ et $a - c = 2024$ ce qui est équivalent à $a - c = -2023$ et $a - c = 2024$ donc il n'y a pas de solution dans ce cas .
ou
• $b + 1 \neq 0$ , on peut simplifier par $b + 1$ , on obtient alors :
$(c - a)(b - 1) = 1$
comme a, b et c sont des entiers ,
Soit $c - a = 1$ et $b - 1 = 1$ d'où $c = a + 1$ et $b = 2$.

L'équation $ab + c = 2023$ donne $2a + a + 1 = 2023$

$3a = 2022$ d'où $a = \frac{2022}{3} = 674$

$c = a + 1 = 674 + 1 = 675$. On trouve donc $a = 674$ , $b = 2$ et $c = 675$

Soit $c - a = -1$ et $b - 1 = -1$ d'où $c = a - 1$ et $b = 0$.
Vérification :

$ab + c = 674 \times 2 + 675 = 2023$

$a + bc = 674 + 2 \times 675 = 2024$