

1 analyse de l'énoncé

y est une approximation de x avec une erreur relative d'au maximum d signifie :

$$\frac{|x-y|}{x} \leq d \Leftrightarrow -xd \leq x-y \leq xd \Leftrightarrow (1-d)x \leq y \leq (1+d)x.$$

NB : d représentant l'erreur, sera un réel petit : $0 < d < 1$.

2 application aux données de l'énoncé

on cherche donc deux réels positifs a et b tels que $y = aA + bB$ soit une approximation de $x = \sqrt{A^2 + B^2}$ avec une erreur relative d'au maximum d , c'est-à-dire :

$$(1-d)\sqrt{A^2 + B^2} \leq aA + bB \leq (1+d)\sqrt{A^2 + B^2}$$

ou en élevant au carré :

$$(1-d)^2(A^2 + B^2) \leq (aA + bB)^2 \leq (1+d)^2(A^2 + B^2)$$

ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} (a^2 - (1-d)^2)A^2 + 2abAB + (b^2 - (1-d)^2)B^2 \geq 0 \\ ((1+d)^2 - a^2)A^2 - 2abAB + ((1+d)^2 - b^2)B^2 \geq 0 \end{cases}$$

3 recherche de conditions suffisantes pour satisfaire ce système

l'inégalité n°2 est vraie **si** le discriminant est nul (car alors le polynôme est le développement d'un carré). Comme $\Delta = 4(1+d)^2(a^2 + b^2 - (1+d)^2)$ donc on obtient une première CS : $(1+d)^2 = a^2 + b^2$.

pour l'inégalité n°1 : **si** $b = 1-d$ (ce qui donne aussi, en utilisant la première CS : $a = 2\sqrt{d}$) alors le coeff de B^2 est nul, et l'inégalité se réduit à

$$B \geq \frac{(1-d)^2 - a^2}{2a(1-d)} A.$$

Il reste à traiter cette inégalité : on voudrait que la propriété soit vraie pour tous A et B tels que $A \geq B$. Ce qui nous amène à une nouvelle CS : $\frac{(1-d)^2 - a^2}{2a(1-d)} \leq 1$

En effet, **si** $\frac{(1-d)^2 - a^2}{2a(1-d)} \leq 1$ alors $\frac{(1-d)^2 - a^2}{2a(1-d)} A \leq A$. Si par hypothèse on sait déjà $A \leq B$, alors l'inégalité sera bien vérifiée.

Ainsi, nous obtenons, pour A et B tels que $A \geq B \geq 0$ et $0 < d < 1$:

si $a = 2\sqrt{d}$ et **si** $b = 1-d$ et **si** $\frac{(1-d)^2 - a^2}{2a(1-d)} \leq 1$ **alors** les deux inégalités du système seront vérifiées.

4 étude de cette dernière CS

on veut $\frac{(1-d)^2 - a^2}{2a(1-d)} \leq 1$

En remplaçant a par $2\sqrt{d}$, notre deuxième CS s'écrit $\frac{1-6d+d^2}{4\sqrt{d}(1-d)} \leq 1$.

Le numérateur serait négatif lorsque $3 - \sqrt{8} \leq d \leq 3 + \sqrt{8}$, donc on va considérer d plus petit que $3 - \sqrt{8} \approx 0,17$.

On peut donc élever au carré et on se ramène à $d^4 - 28d^3 + 70d^2 - 628d + 1 \leq 0$.

on peut trouver le tableau de signe de cette fonction du quatrième degré grâce à la calculatrice, elle est négative entre deux racines $d_1 \approx 0,0395$ et $d_2 \approx 0,44$.

5 conclusion

SI :

- $0,0395... \leq d \leq 0,17$
- $a = 2\sqrt{d}$
- $b = 1-d$.

ALORS :

$aA + bB$ est donc une approximation de $\sqrt{A^2 + B^2}$ avec une erreur relative d'au maximum d .

6 application à notre cas particulier

En particulier, le plus petit d simple satisfaisant la contrainte est $d = 0,04$ qui donne $a = 0,4$ et $b = 0,96$.

Dans ce cas la proposition " $0,4A + 0,96B$ est donc une approximation de $x = \sqrt{A^2 + B^2}$ avec une erreur relative d'au maximum 4%" est équivalente à l'encadrement :

$$0,9216(A^2 + B^2) \leq 0,16A^2 + 0,768AB + 0,9216B^2 \leq 1,0816(A^2 + B^2)$$

lui-même équivalent au système :

$$\begin{cases} 0,7616A \leq 0,768B \\ (0,96A - 0,4B)^2 \geq 0 \end{cases}$$

qui est vérifié dès que l'on a $A \leq B$.

remarque : ça marche aussi par exemple pour $d = 0,09$, qui donne " $0,3A + 0,91B$ est donc une approximation de $x = \sqrt{A^2 + B^2}$ avec une erreur relative d'au maximum 9%". L'approximation est donc moins bonne!

7 interprétation graphique

on pose un curseur k représentant et on trace le cercle d'équation $\sqrt{x^2 + y^2} = k$ et la droite d'équation $0,4x + 0,96y = k$, on voit que quel que soit la valeur de k , et pour $y \geq x \geq 0$, le cercle et la droite sont très proches!

