

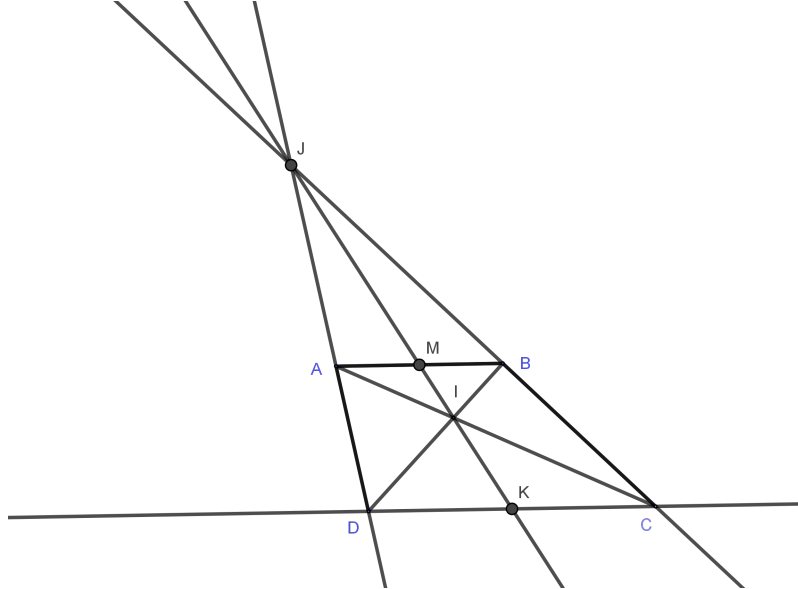
1 construction

placer deux points C et D sur (d) de sorte que ABCD soit un trapèze avec $DC > AB$.

construire I, point d'intersection des droites (AC) et (BD)

construire J, point d'intersection des droites (AD) et (BC)

construire M, point d'intersection des droites (IJ) et (AB) : ce point M est le milieu du segment [AB].



2 démonstration

2.1 théorèmes utilisés pour la démonstration

nous utilisons des théorèmes sur les aires, chers à Daniel Perrin :

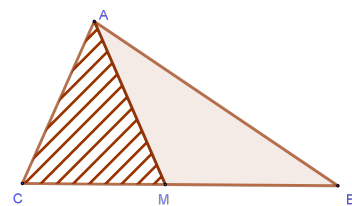
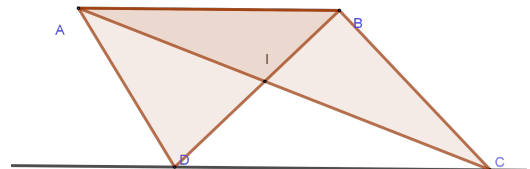
* théorème du trapèze : si ABCD est un trapèze dont les diagonales se coupent en I, alors les triangles AID et BIC ont même aire.

(NB : vient de l'égalité des aires de ADC et BDC, auxquelles on soustrait celle de IDC)

* la propriété des proportions : dans un triangle ABC où M est un point de [BC], alors $\frac{\text{aire}(\triangle AMB)}{\text{aire}(\triangle AMC)} = \frac{MB}{MC}$

(NB : vient de la formule de l'aire avec deux triangles de même hauteur)

* Thalès et triangles semblables : dans une configuration de Thalès (deux triangles avec des côtés parallèles), les triangles sont semblables, et si les longueurs sont multipliées par a alors les aires sont multipliées par a^2 .



2.2 hypothèses

hypothèses :

- ABCD trapèze de bases AB et DC
- I, point intersection des droites (AC) et (BD)
- J, point d'intersection des droites (AD) et (BC)
- K, point d'intersection des droites (IJ) et (CD)
- M, point d'intersection des droites (IJ) et (AB)

conclusion à démontrer : M est le milieu de [AB]

2.3 notations

notations : on pose $AB=1$ et $DC=a$

on pose aussi $k = \frac{MB}{MC}$: la conclusion devient ainsi de démontrer que $k = 1$.

2.4 démonstration

Le théorème de Thalès/triangles semblables s'applique de nombreux fois dans cette figure.

* d'une part entre les triangles issus de I : les triangles IDC, IKD et ICK sont semblables à IAB, IMB et IMA dans un rapport a .

* d'autre part entre les triangles issus de J : les triangles JDC, JKD et JKC sont semblables à JAB, JMA et JMB dans ce même rapport a .

Nous allons maintenant raisonner sur les aires de ces triangles :

* l'aire de JMA est x , alors (th des proportions) l'aire de JMB est kx

* l'aire de IMA est y , alors (th des proportions) l'aire de IMB est ky . En utilisant le th de Thalès-aires, on en déduit aussi que l'aire de ICK est $a^2 y$ et celle de IDK est $ka^2 y$

* l'aire de IAD est z , alors (th du trapèze) l'aire de IBC est aussi z

Appliquons maintenant le th Thalès-aires aux triangles issus de J :

* l'aire de JKC est a^2 fois celle de JMB, ce qui donne $kx + ky + z + a^2 y = a^2 kx$

* l'aire de JDK est a^2 fois celle de JAM, ce qui donne $x + y + z + ka^2 y = a^2 x$. ou encore, en multipliant par k : $kx + ky + kz + k^2 a^2 y = ka^2 x$

Le système formé par ces deux égalités donne $(k-1)z + (k^2-1)a^2 y = 0$, c'est-à-dire $(k-1)(z + (k+1)a^2 y) = 0$.

Comme le deuxième facteur ne peut être nul, on en déduit : $k = 1$, ce qui signifie que $MA=MB$: M est bien le milieu de [AB].

2.5 remarque

j'aurais aimé trouver une démonstration plus élégante...