

Il s'agit donc de montrer que pour $0 \leq A \leq B$
on a $\left| \frac{0,4A + 0,96B - \sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \leq 0,04$.

Soit en posant $t = \frac{B}{A}$:

$$\forall t \geq 1, \left| \frac{0,4 + 0,96t}{\sqrt{1+t^2}} - 1 \right| \leq 0,04$$

Pour cela nous étudions $f(t) = \frac{0,4 + 0,96t}{\sqrt{1+t^2}} - 1$
pour $t \geq 1$. $f'(t)$ est du signe de $0,96 - 0,4t$ d'où
le tableau des variations :

t	1	2,4	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	-0,038	0,04	-0,04

et donc $|f(t)| \leq 0,04$.

La résolution de $f(t) = 0$ se ramène à

$$t^2(1 - 0,96^2) - 0,8 \times 0,96t + 1 - 0,4^2 = 0 \text{ soit}$$

$$t = 1,25 \text{ ou } t = 8,54.$$

Donc $0,4A + 0,96B$ est une approximation
de $\sqrt{A^2 + B^2}$ avec une erreur relative de 0,04
par excès si $1,25.A \leq B \leq 8,54.A$ par
défaut sinon.

COUTU Bernard

Quint-Fonsegrives