

Une étonnante approximation (552-1)

L'exercice demande d'étudier, lorsque $0 \leq A \leq B$, la quantité

$$E_r = \left| \frac{\sqrt{A^2+B^2} - (0,4A+0,96B)}{\sqrt{A^2+B^2}} \right| = \left| \frac{\sqrt{1+\left(\frac{B}{A}\right)^2} - \left(0,4+0,96\frac{B}{A}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{B}{A}\right)^2}} \right|$$

Pour cela on va étudier les variations de la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - (0,4+0,96x)}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $[1; +\infty[$, dérivable sur ce même intervalle.

Le calcul de la dérivée donne $f'(x) = \frac{-0,96+0,4x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$, donc du signe de $0,4x - 0,96$

Les variations de cette fonction sont ainsi données par :

x	1	2,4	$+\infty$
$f(x)$	$f(1)$	$f(2,4)$	0,04

$\swarrow$ $\searrow$
 $f(1) \rightarrow f(2,4) \rightarrow 0,04$

Or $f(2,4) = -0,04$ et $f(1) \approx 0,038335 \dots$

Par conséquent pour tout $x \geq 1$, $-0,04 \leq f(x) \leq 0,04$

On en déduit le résultat demandé.

On peut s'interroger plus généralement sur la possibilité d'approcher $\sqrt{A^2+B^2}$ par $aA + bB$ avec une erreur relative E_r inférieure à $t\%$.

On sait que pour $t = 4$, le problème à des solutions, donc pour toute valeur de $t \geq 4$ également. Evidemment il n'y a pas de solution pour $t = 0$.

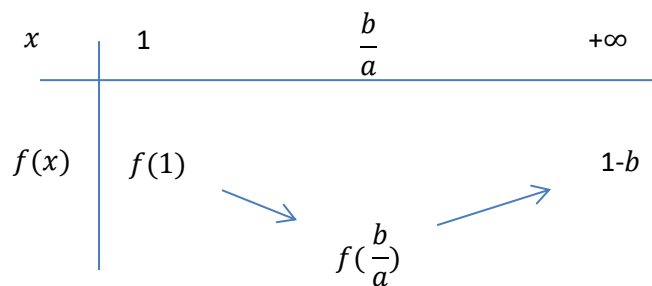
La question est alors : quelle est la valeur minimale de t qui donne des solutions à cette approximation ?

Si on reprend les calculs précédents, la fonction à étudier est $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - (a+bx)}{\sqrt{1+x^2}}$

Le calcul de la dérivée donne $f'(x) = \frac{-b+ax}{(\sqrt{1+x^2})^3}$, donc du signe de $ax - b$ sur $[1; +\infty[$.

L'étude des cas particuliers lorsque B est grand devant A ou lorsque $A = B$ montre rapidement que b est proche de 1 et a est proche de $\sqrt{2} - 1$. Par conséquent seul le cas où $0 \leq a \leq b$, soit $\frac{b}{a} \geq 1$ est intéressant pour l'étude de la question posée.

Par conséquent on a le tableau de variation suivant :



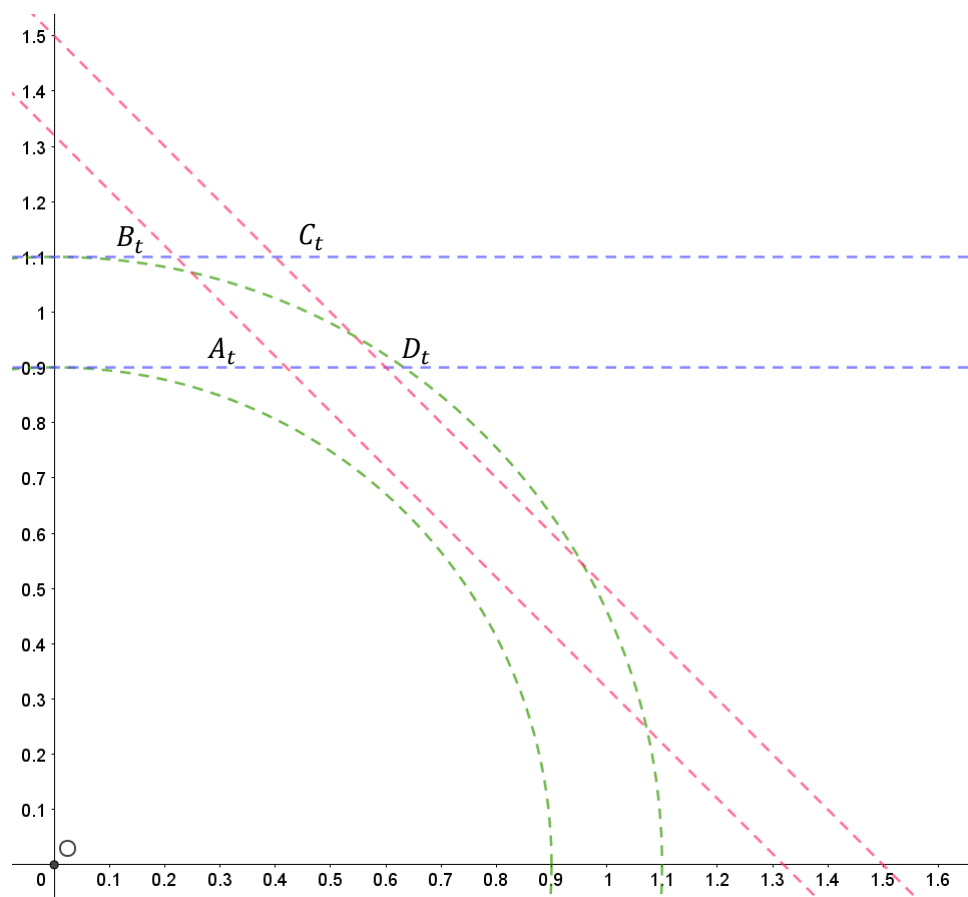
Avec $f(1) = 1 - \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ et $f\left(\frac{b}{a}\right) = 1 - \sqrt{a^2 + b^2}$

Par conséquent pour que E_r soit inférieure à $t\%$, il faut et il suffit qu'en valeur absolue, les trois nombres $1-b$, $1 - \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ et $1 - \sqrt{a^2 + b^2}$ soient inférieurs ou égaux à $\frac{t}{100}$

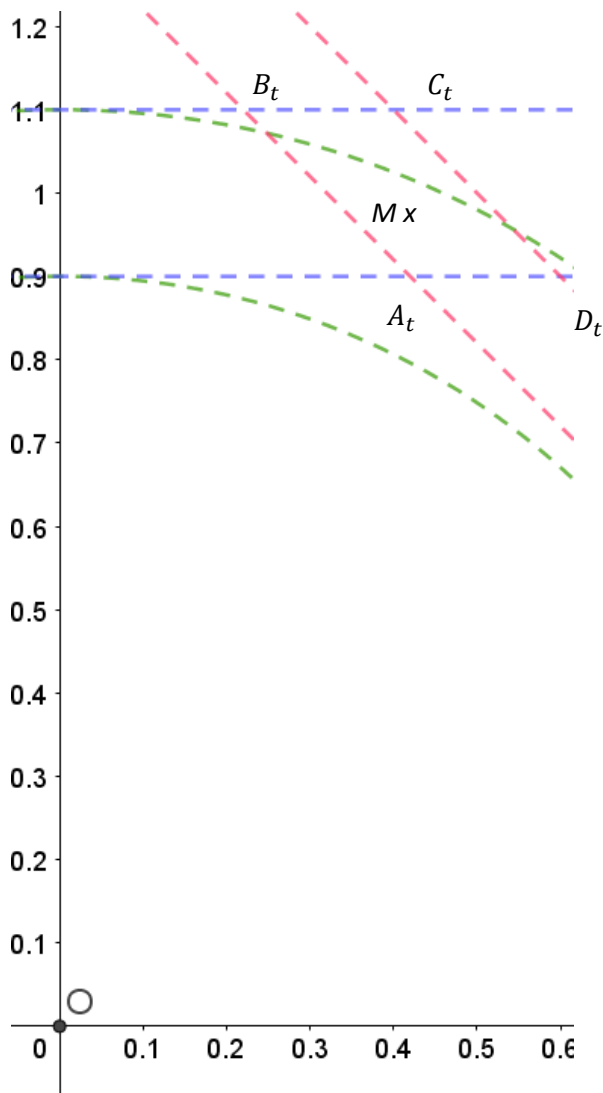
On cherche pour quelles valeurs de t , il existe a et b qui vérifient :

$$1 - \frac{t}{100} \leq b \leq 1 + \frac{t}{100}, \quad 1 - \frac{t}{100} \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}} \leq 1 + \frac{t}{100} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{t}{100} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1 + \frac{t}{100}$$

On représente ci-dessous l'ensemble des couples (a, b) qui répondent aux contraintes ci-dessus (ici, on a pris $t = 10$).



Les couples solutions sont les coordonnées des points de la zone Z , constituée des points du quadrilatère $A_t B_t C_t D_t$ qui sont situés entre les cercles de centre O et de rayons $1 - \frac{t}{100}$ et $1 + \frac{t}{100}$, représentés en pointillés verts.



Pour tout point M dans cette zone Z , une étude rapide de l'angle $\widehat{OA_t M}$ montre qu'il est obtus et par conséquent $OM \geq OA_t$

On en déduit que la zone Z sera non vide, et donc que le problème aura une solution, si et seulement si le point A_t appartient à Z .

Déterminons les coordonnées de A_t intersection des droites d'équation $b = 1 - \frac{t}{100}$ et $1 - \frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{t}{100}$; on obtient $A_t \left((\sqrt{2} - 1) \left(1 - \frac{t}{100} \right), 1 - \frac{t}{100} \right)$

Donc $OA_t = \left(1 - \frac{t}{100} \right) \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. On remarque que OA_t est supérieur à $1 - \frac{t}{100}$, il reste à déterminer pour quelles valeurs de t , OA_t est inférieur ou égal à $1 + \frac{t}{100}$.

Or $\left(1 - \frac{t}{100}\right)\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \leq 1 + \frac{t}{100}$ équivaut à $t \geq t_0$ avec $t_0 = 100 \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}+1} = 3,956 \dots$

En conclusion, pour $0 \leq A \leq B$, on peut trouver une approximation de $\sqrt{A^2 + B^2}$ par $aA + bB$ avec une erreur relative E_r inférieure à $t\%$ pour les valeurs de $t \geq t_0$.

On ne peut pas faire beaucoup mieux que la valeur 4% proposée l'énoncé !