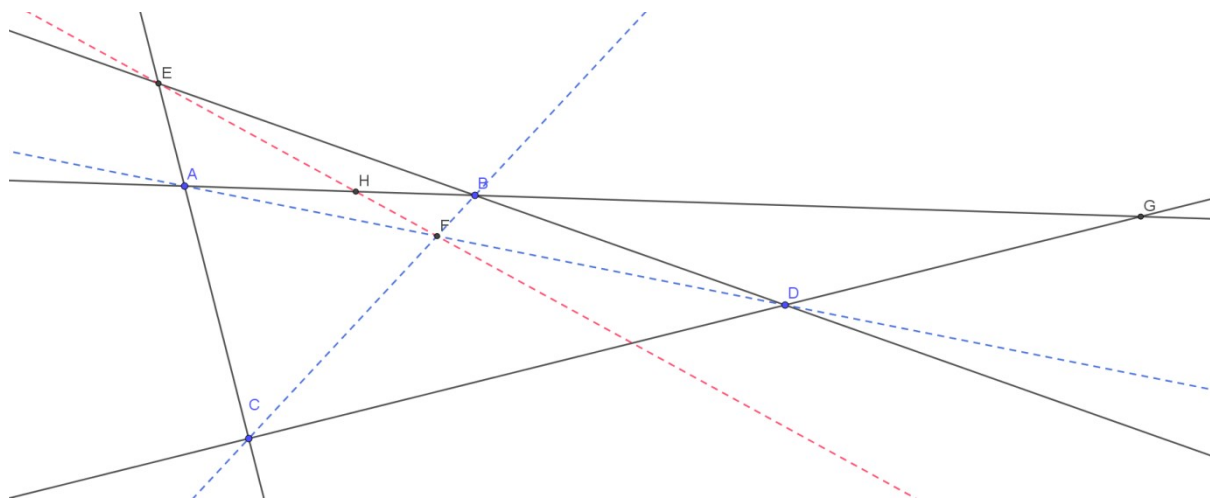


Construction d'un milieu à la règle seule (problème 552-4)

Première méthode : en géométrie projective

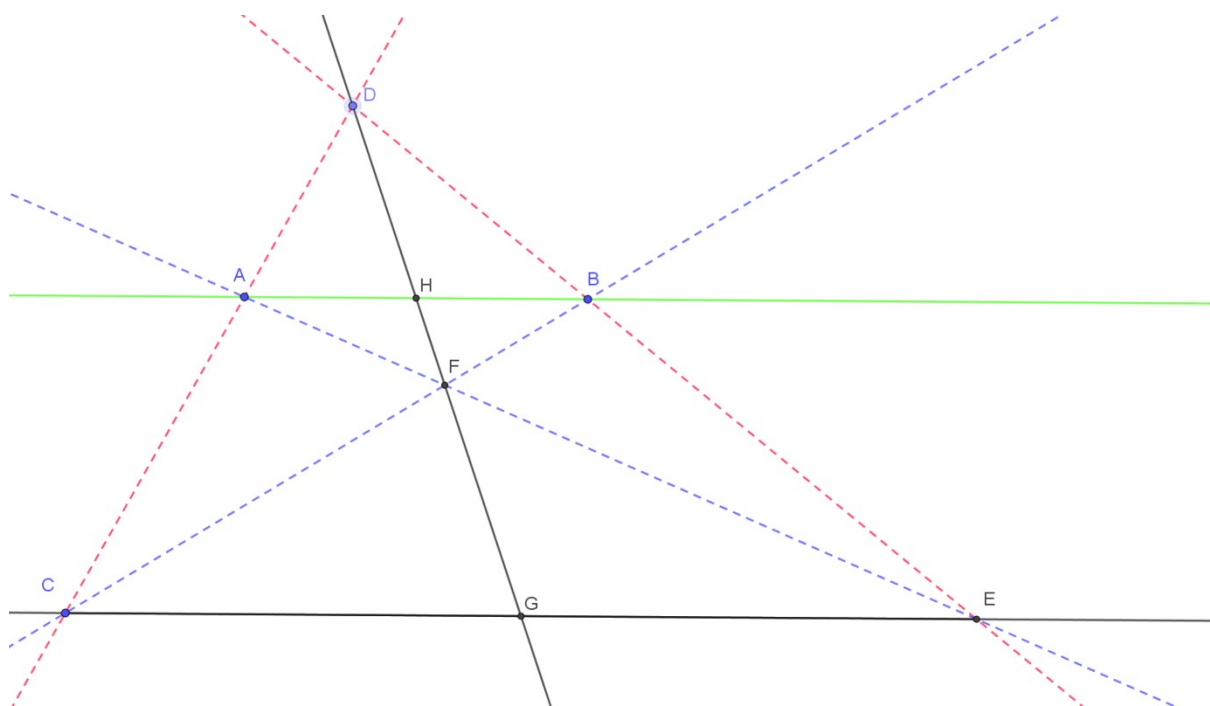
Les constructions à la règle seule qui s'appuient sur des alignements invitent à avoir un regard projectif :



Dans le cas général, si on considère le quadrilatère complet constitué par les deux couples de droites (GB) , (GD) et (EA) , (EB) , la droite (EF) est la polaire du point G par rapport aux droites (EA) et (EB) .

Par conséquent la division (A, B, G, H) est harmonique.

Dans le cas limite où le point G est envoyé à l'infini, les droites (AB) et (CD) sont parallèles et par conséquent le point H , conjugué du point à l'infini est le milieu des points A et B .

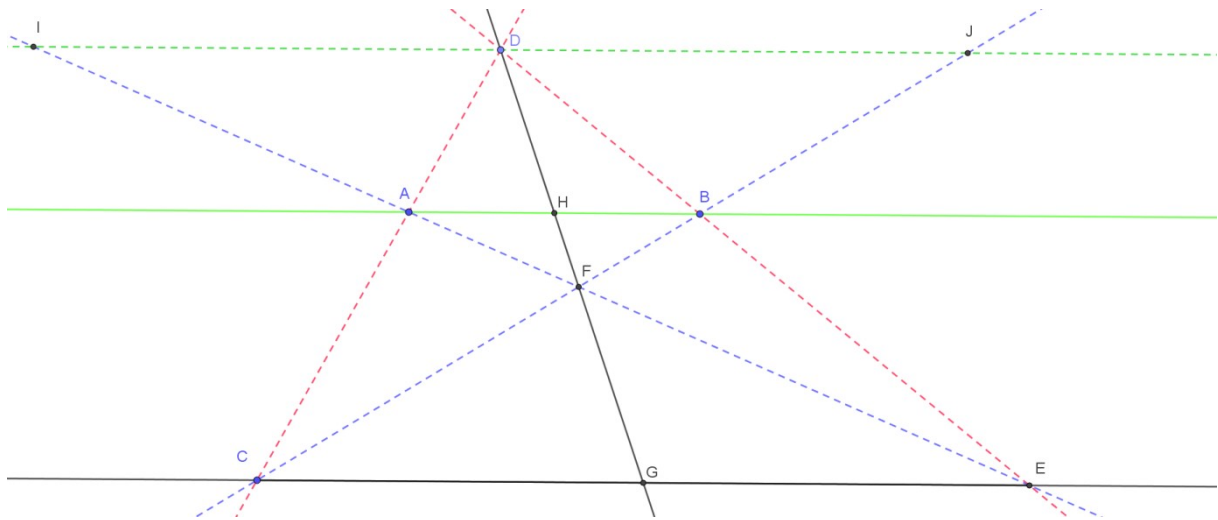


On en déduit aisément la construction du milieu de (A, B) :

On choisit deux points C et E sur la droite $\mathcal{D}$, telle que les droites (CA) et (EB) soient concourantes en D . En notant F le point d'intersection des droites (CB) et (EA) , la droite (DF) coupe la droite (AB) en H milieu de (A, B) .

Deuxième méthode : en géométrie affine

On considère la même configuration que précédemment ; on y ajoute la droite parallèle à (AB) passant par D . Les droites (AE) et (CB) coupent cette parallèle respectivement en I et J .



L'utilisation du théorème de Thalès dans les triangles CDJ , EDI et BCE permet d'écrire les égalités :

$$\frac{AB}{DJ} = \frac{CA}{CD}, \quad \frac{AB}{DI} = \frac{EB}{ED} \text{ et } \frac{EB}{ED} = \frac{CA}{CD}$$

Par conséquent on a $\frac{AB}{DJ} = \frac{AB}{DI}$ et par conséquent D est le milieu de (I, J) .

Ainsi, l'homothétie de centre F qui transforme la droite (IJ) en la droite (AB) transforme le milieu D de (I, J) en le milieu H de (A, B) .

La construction du milieu de (A, B) à la règle seule est la même que dans la démonstration précédente.