

## Exercice 552-1

Posons  $c = 0,4a + 0,96b$  et  $l = \sqrt{a^2 + b^2}$  avec  $0 \leq a \leq b$

Si  $b = 0$  alors  $c = l = 0$  donc on peut supposer  $b \neq 0$

Si  $a = 0$  alors  $c = 0,96b$  et  $l = b$  donc  $c = 0,4a + 0,96b = 0,96b$  est bien une approximation de

$l = \sqrt{a^2 + b^2} = b$  avec une erreur relative de 4%. donc on peut supposer  $a \neq 0$

Appelons  $\varepsilon = \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - (0,4a + 0,96b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$  l'erreur relative.

on doit montrer que  $\left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - (0,4a + 0,96b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 0,04$

Soit  $\left| 1 - \frac{(0,4a + 0,96b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 0,04$

$$-0,04 \leq 1 - \frac{(0,4a + 0,96b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 0,04$$

$$-1,04 \leq -\frac{(0,4a + 0,96b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq -0,96$$

$$0,96 \leq \frac{0,4a + 0,96b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1,04$$

Géométriquement, dans  $\frac{0,4a + 0,96b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  on reconnaît les distances du point  $N(0,4;0,96)$  à la famille de

droite  $ax + by = 0$ . Ce qui nous amène de façon homogène à prendre  $x = \frac{b}{a}$

On a alors  $\frac{0,4a + 0,96b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a \left( 0,4 + 0,96 \frac{b}{a} \right)}{a \sqrt{1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2}} = \frac{0,4 + 0,96x}{\sqrt{1 + x^2}} = f(x)$ , avec  $x \geq 1$ .

$$f'(x) = \frac{0,96\sqrt{1+x^2} - (0,4 + 0,96x) \times \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{0,96(1+x^2) - (0,4 + 0,96x) \times x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$$

Soit

$$f'(x) = \frac{0,96 + 0,96x^2 - 0,4x - 0,96x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} = \frac{0,96 - 0,4x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$$

Comme 2,4 annule  $0,96 - 0,4x$ ,  $f'$  est positive sur  $[0;2,4]$  et négative sur  $]2,4;+\infty]$  donc  $f$  est croissante sur  $[0;2,4]$  et décroissante sur  $]2,4;+\infty]$

De plus  $f(1) = \frac{1,36}{\sqrt{2}} > 0,96$ ,  $f(2,4) = \frac{0,4 + 0,96 \times 2,4}{\sqrt{1 + 2,4^2}} = \frac{2,704}{\sqrt{6,76}} = \frac{2,704}{2,6} = 1,04$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0,4 + 0,96x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( \frac{0,4}{x} + 0,96 \right)}{x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{0,4}{x} + 0,96 \right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = 0,96^+.$$

On a donc bien une erreur relative inférieure à 4%.