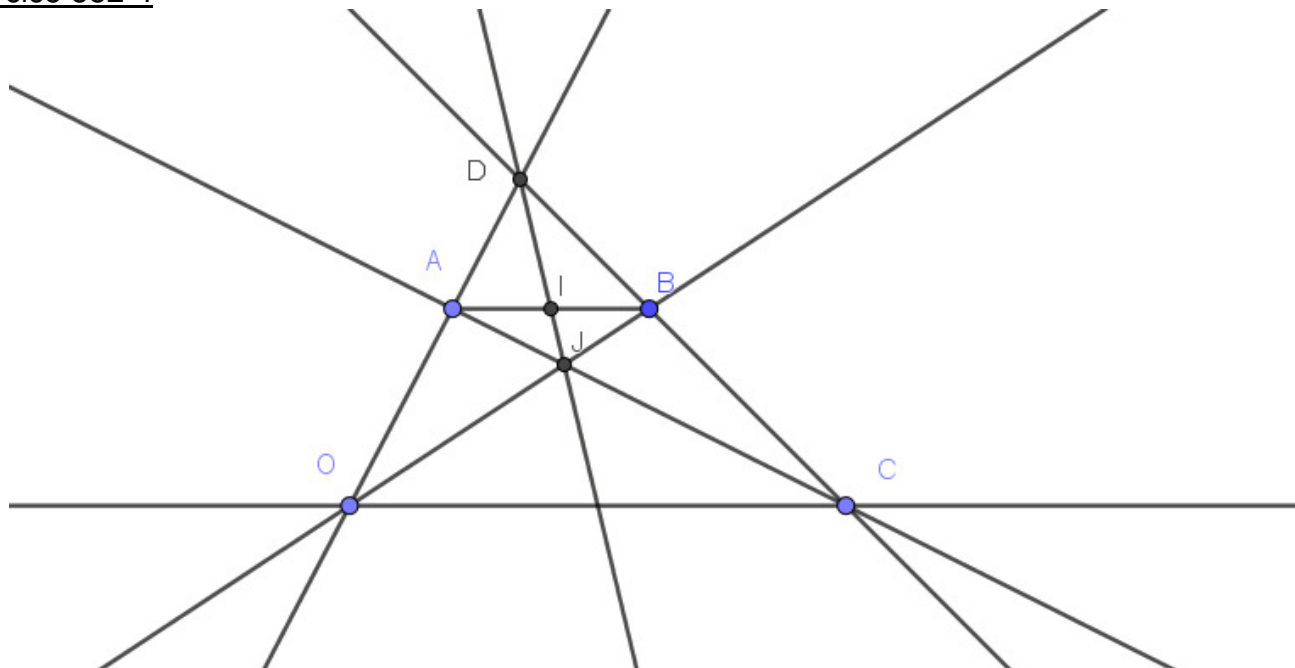


Exercice 552-4



Construction :

On choisit deux points O et C sur la droite parallèle à (AB). presque au hasard. On trace (OA) et (BC) qui se coupe en D puis (AC) et (OB) se coupe en J et en fin (DJ) coupe (AB) en son milieu I.

Démonstration (accessible au niveau seconde)

Dans le repère $(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA})$ on a $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$ et $C(c,0)$ avec c différent de 0 et de 1.

La droite (BC) pour équation cartésienne $y = \frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}$.

La droite (AC) pour équation cartésienne $y = \frac{1}{-6}x + 1$.

La droite (OB) pour équation cartésienne $y = x$.

D a donc pour coordonnées $(0, \frac{c}{c-1})$.

Pour trouver les coordonnées de J on se sert de $x = \frac{1}{-c}x + 1$.

Il vient successivement

$$x + \frac{1}{c}x = 1$$

$$\frac{c+1}{c}x = 1$$

$$x = \frac{c}{c+1}$$

Donc $J(\frac{c}{c+1}, \frac{c}{c+1})$

Pour trouver l'équation de (DJ) on calcule son coefficient directeur

$$x = \frac{\frac{c}{c+1} - \frac{c}{c-1}}{\frac{c}{c+1}} = \frac{c \times \left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{c-1} \right)}{c \times \frac{1}{c+1}} = \frac{\frac{c-1-(c+1)}{(c+1)(c-1)}}{\frac{1}{c+1}} = \frac{-2}{c-1}$$

La droite (DJ) a pour équation

$y = \frac{-2}{c-1}x + \frac{c}{c-1}$ et comme $\frac{-2}{c-1} \times \frac{1}{2} + \frac{c}{c-1} = \frac{-1}{c-1} + \frac{c}{c-1} = \frac{c-1}{c-1} = 1$, la droite (DJ) passe bien par le milieu de $[AB]$.