

Solution problème 552-1 : approximation

Démontrons que pour tous réels A et B tels que $B \geq A \geq 0$,

$$\text{on a } \left| 0,4A + 0,96B - \sqrt{A^2 + B^2} \right| \leq 4\% \times \sqrt{A^2 + B^2}$$

Ce qui revient à démontrer que $96\sqrt{A^2 + B^2} \leq 40A + 96B \leq 104\sqrt{A^2 + B^2}$

On a d'une part $104^2A^2 + 104^2B^2 - 40^2A^2 - 96^2B^2 - 2 \times 40 \times 96AB$

$$= 96^2A^2 + 40^2B^2 - 2 \times 40 \times 96AB = (96A + 40B)^2$$

Donc $104^2A^2 + 104^2B^2 - 40^2A^2 - 96^2B^2 - 2 \times 40 \times 96AB \geq 0$

Et $104^2A^2 + 104^2B^2 \geq 40^2A^2 + 96^2B^2 + 2 \times 40 \times 96AB \geq 0$

D'où finalement $40A + 96B \leq 104\sqrt{A^2 + B^2}$

D'autre part $96^2 - 40^2 = 7616$ et $2 \times 40 \times 96 = 7680$

Donc $(96^2 - 40^2)A^2 \leq 2 \times 40 \times 96A^2 \leq 2 \times 40 \times 96AB$ car $A \leq B$

D'où $(96^2 - 40^2)A^2 + 96^2B^2 \leq 2 \times 40 \times 96AB + 96^2B^2$

Donc $96^2(A^2 + B^2) \leq 2 \times 40 \times 96AB + 40^2A^2 + 96^2B^2$

Donc $0 \leq 96^2(A^2 + B^2) \leq (40A + 96B)^2$

D'où finalement $40A + 96B \geq 96\sqrt{A^2 + B^2}$