

552-1 Une étonnante approximation

Il s'agit d'encadrer le rapport :
$$r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} - 0,4 \cdot A - 0,96 \cdot B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 - \frac{10 \cdot A + 24 \cdot B}{25 \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}$$

En posant $x = \frac{A}{B}$, on obtient :
$$r = f(x) = 1 - \frac{10 \cdot x + 24}{25 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq x \leq 1$$

La dérivée de f est :
$$f'(x) = \frac{2}{25} \cdot \frac{12 \cdot x - 5}{(x^2 + 1)^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$$

La fonction f décroît de $f(0) = \frac{24}{25} = 0,04$ à $f\left(\frac{5}{12}\right) = -\frac{1}{25} = -0,04$

Puis la fonction f croît de $f\left(\frac{5}{12}\right) = -\frac{1}{25} = -0,04$ à $f(1) = 1 - \frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25} \approx 0,0383$

Donc : $|f(x)| \leq 0,04$ pour tout x de $[0, 1]$

L'erreur relative est bien de 4% au maximum.