

Exercice 552-1

A et B sont des nombres réels vérifiant : $0 \leq A \leq B$.

Il s'agit que montrer que $|\sqrt{A^2+B^2}-0,4 \times A-0,96 \times B| \leq 0,04 \times \sqrt{A^2+B^2}$. (1)

Cette relation (1) est vraie si $A = 0$.

Supposons donc que A est différent de 0 et montrons que $\left|1 - \frac{0,4 \times A + 0,96 \times B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \leq 0,04$,

autrement dit que $\left|1 - \frac{0,4 + 0,96 \times \frac{B}{A}}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}}}\right| \leq 0,04$,

autrement dit encore que $\frac{0,4 + 0,96 \times \frac{B}{A}}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}}}$ appartient à l'intervalle $[0,96 ; 1,04]$. (2)

Pour cela, considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{0,4 + 0,96 \times x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{0,96 \times \sqrt{1+x^2} - (0,4 + 0,96 \times x) \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{0,96(1+x^2) - (0,4 + 0,96 \times x) \times x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{0,96 - 0,4 \times x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{0,4 \times (2,4 - x)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \text{ a le signe de } 2,4 - x.$$

Par suite, f est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2,4]$ et décroissante sur l'intervalle $[2,4 ; +\infty[$.

Or $f(1) = \frac{1,36}{\sqrt{2}}$, ce nombre étant peu différent de 0,9617 ;

$$\text{or } f(2,4) = \frac{0,4 + 0,96 \times 2,4}{\sqrt{1+2,4^2}} = \frac{2,704}{2,6} = 1,04 ;$$

or la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est 0,96 ;

donc, compte tenu des variations de la fonction f , $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0,96 ; 1,04]$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Comme $A \leq B$, $\frac{B}{A}$ appartient à l'intervalle $[1 ; +\infty[$ donc $f(\frac{B}{A})$ appartient à l'intervalle $[0,96 ; 1,04]$; ce qui constitue la relation (2) qui devait être démontrée.