

Exercice 552-4

Sollicité par la requête « milieu d'un segment règle seule », Internet fournit une construction qui répond à la question posée (il suffit alors de cliquer sur le lien https://fr.wikipedia.org/wiki/Constructions_du_milieu_d%27un_segment).

Cette construction s'appuie sur le résultat parfois appelé « Théorème du trapèze ». Celui-ci affirme qu'étant donné un trapèze $ABCD$, autre qu'un parallélogramme, le point Ω commun aux côtés non parallèles (AD) et (BC) du trapèze, le point ω commun aux diagonales (AC) et (BD) du trapèze et le milieu M du segment $[AB]$ sont alignés.

Pour effectuer la construction demandée, il suffit de choisir sur la droite $(\mathcal{D})$ deux points C et D tels que le quadrilatère $ABCD$ soit un trapèze autre qu'un parallélogramme, de construire les points Ω et ω , de placer le point M à l'intersection de la droite (AB) et de la droite $(\Omega\omega)$.

Quant au théorème du trapèze, il se démontre facilement.

Pour cela, on considère l'homothétie H de centre Ω qui transforme A en D . Comme une homothétie transforme une droite en une droite parallèle, l'homothétie H transforme B en C . Transformant A en D ainsi que B en C , l'homothétie H transforme le milieu M du segment $[AB]$ en le milieu N du segment $[DC]$. Par suite, les points Ω , M et N sont alignés.

On démontre, de la même façon, en considérant l'homothétie de centre ω qui transforme A en C , que les points ω , M et N sont alignés.

Finalement, les points Ω et ω appartiennent à la droite (MN) et donc les points Ω , ω et M sont alignés.