

552-1. Une étonnante approximation (Fabien Lombard - Sarrebourg)

Soit deux nombres réels A et b tels que $B \geq A > 0$, alors $0,4A + 0,96B$ est une approximation de $\sqrt{A^2 + B^2}$ avec une erreur relative d'au maximum 4%.

Solution proposée par Daniel Văcaru, Pitești, Roumanie
il faut démontrer que

$$\left| \frac{\sqrt{A^2 + B^2} - \frac{2}{5}A - \frac{24}{25}B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \leq \frac{1}{25}, \quad (1)$$

ce qui équivaut à

$$\left| 1 - \frac{10A + 24B}{25\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \leq \frac{1}{25} \quad (2)$$

c'est

$$-\frac{1}{25} \leq 1 - \frac{10A + 24B}{25\sqrt{A^2 + B^2}} \leq \frac{1}{25} \quad (3)$$

relation suivie par

$$\frac{24}{25} \leq \frac{10A + 24B}{25\sqrt{A^2 + B^2}} \leq \frac{26}{25} \cdot \frac{25}{2} \quad (4)$$

Ensuite, nous obtenons

$$12 \leq \frac{5A + 12B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \leq 13 \quad (5)$$

Cette relation équivaut à

$$144(A^2 + B^2) \leq 25A^2 + 120AB + 144B^2 \leq 169(A^2 + B^2) \quad (6)$$

et alors

$$\begin{cases} 120AB - 119A^2 & \geq 0 \\ 25B^2 - 120AB + 144A^2 & \geq 0 \end{cases} : A \Leftrightarrow \begin{cases} 120B - 119A & \geq 0 \\ (12A - 5B)^2 & \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

La relation

$$(12A - 5B)^2 \geq 0 \quad (8)$$

est toujours vraie. On sait que

$$A \leq B \cdot 119 \Leftrightarrow 119A \leq 119B \quad (9)$$

Il est évident que $B \geq 0 \mid + 119B \Leftrightarrow 120B \geq 119B$.

Il suit que

$$120B - 119A \geq 0 \quad (10)$$

Les relations (8) et (10) prouvent l'énoncé du problème