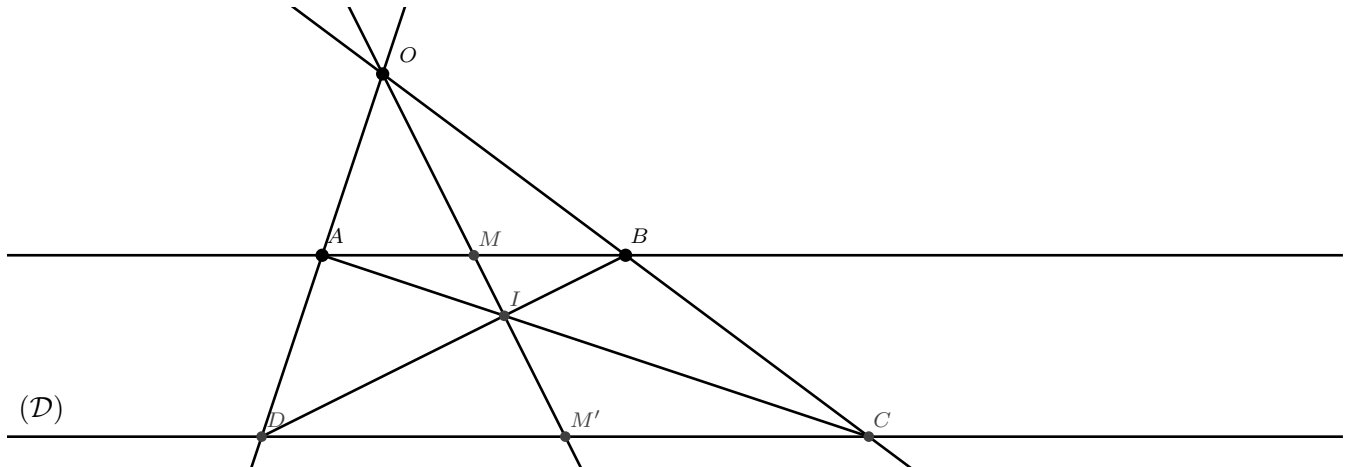


Soit A et B deux points distincts du plan et $\mathcal{D}$ une droite parallèle et distincte de (AB) .
 Construire à la règle non graduée seule le milieu de $[AB]$.



On place un point O dans le demi-plan de frontière la droite (AB) ne contenant pas la droite $\mathcal{D}$, on trace alors les droites (OA) et (OB) qui coupent respectivement la droite $(\mathcal{D})$ aux points D et C.

Soit I le point d'intersection des diagonales du trapèze (ABCD) et M et M' les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

Comme (AB) est parallèle à $(\mathcal{D})$, les droites (AB) et (CD) ont le même point à l'infini ∞ .

Démontrons que les points M et M' appartiennent à la polaire de ∞ par rapport aux droites (OA) et (OB) puis que la droite (OI) est la polaire de ∞ par rapport aux droites (OA) et (OB) , ce qui démontrera que le milieu M de $[AB]$ appartient à la droite (OI) .

Dans le livre "Géométrie classe de Mathématiques de C.LEBOSSE et C.HEMERY

Editions Jacques Gabay) j'ai trouvé la propriété :

En notant ∞ le point à l'infini de la droite (AB) ,

(∞, M, A, B) est une division harmonique si et seulement si le point M est le milieu de $[AB]$.

Comme M est le milieu de $[AB]$, (∞, M, A, B) est une division harmonique, donc le point M est conjugué harmonique de ∞ par rapport aux droites (OA) et (OB) .

Il résulte que le point M appartient à la polaire de ∞ par rapport aux droites (OA) et (OB) .

La droite (OM) est la polaire de ∞ par rapport aux droites (OA) et (OB) .

M' est le milieu de $[DC]$ donc (∞, M', D, C) est une division harmonique et par conséquent le point M' est conjugué harmonique de ∞ par rapport aux droites (OD) et (OC) donc la droite (OM') est la polaire de ∞ par rapport aux droites (OD) et (OC) donc par rapport aux droites (OA) et (OB)

Par conséquent $(OM') = (OM)$

D'autre part la polaire de ∞ par rapport aux droites (OA) et (OB) passe par le point O et comme elle est aussi la polaire de ∞ par rapport aux droites (AC) et (BD) , elle passe par le point I.

cette polaire est donc la droite (OI) qui passe par les points M et M'.

D'où la construction du point M milieu de $[AB]$.