

Triplets d'entiers naturels (x, y, z) non nuls vérifiant la condition (C) « $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ est entier »

Deux remarques préliminaires

- Si (a, b, c) vérifie (C), alors (b, c, a) et (c, a, b) aussi ...
mais pas nécessairement (a, c, b) comme le montre l'exemple $(1, 2, 4)$
- Si la somme de deux fractions irréductibles $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ est entière alors $b = d$

En effet si $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = n(\text{entier})$, alors $\frac{a}{b} = \frac{nd - c}{d}$. Si k divise $(nd - c)$ et d , il divise aussi $(nd - c) + nd = c$ donc la fraction $\frac{nd - c}{d}$ est irréductible comme l'est $\frac{c}{d}$

$\frac{a}{b} = \frac{nd - c}{d}$ est l'égalité de deux fractions irréductibles donc nécessairement $b = d$

Je vais utiliser le fait qu'un entier est un cube si les multiplicités de ses diviseurs premiers sont des multiples de 3.

Soit p un entier naturel premier, α , β , et γ les multiplicités (éventuellement nulles) de p comme diviseur de x , y et z

$x = p^\alpha x'$ où p ne divise pas x'

$y = p^\beta y'$ où p ne divise pas y'

$z = p^\gamma z'$ où p ne divise pas z'

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \text{ entier} &\implies \frac{p^\alpha x'}{p^\beta y'} + \frac{p^\beta y'}{p^\gamma z'} + \frac{p^\gamma z'}{p^\alpha x'} \text{ entier} \\ &\implies \frac{x'^2 z'}{p^{\beta-\alpha}} + \frac{y'^2 x'}{p^{\gamma-\beta}} + \frac{z'^2 y'}{p^{\alpha-\gamma}} \text{ entier} \end{aligned}$$

D'après la première remarque préliminaire, on peut supposer sans perdre de généralité que x désigne celui des 3 entiers x , y et z qui a la plus faible (au sens large) multiplicité : $\alpha - \gamma \leq 0$, $\beta - \alpha \geq 0$

$\frac{z'^2 y'}{p^{\alpha-\gamma}}$ est donc un entier et par conséquent $\frac{x'^2 z'}{p^{\beta-\alpha}} + \frac{y'^2 x'}{p^{\gamma-\beta}}$ est aussi un entier

Les 2 fractions $\frac{x'^2 z'}{p^{\beta-\alpha}}$ et $\frac{y'^2 x'}{p^{\gamma-\beta}}$ sont irréductibles, la seconde remarque préliminaire s'applique : $\beta - \alpha = \gamma - \beta$.

La multiplicité de p dans xyz est $\alpha + \beta + \gamma = 3\beta$