

553-2

Existe-t-il une suite de réels strictement positifs universelle $(a_n)_{n \geq 0}$, c'est à dire telle que :
pour toute suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ il faut et il suffit que (u_n) soit bornée pour que la série de terme générale $a_n u_n$ soit absolument convergente.

Je suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la condition.

La série de terme général a_n converge car la suite dont tous les termes valent 1 est bornée.

Soit p un entier naturel, n_p un rang tel que $a_{n_p} = \min_{p^2 \leq n < (p+1)^2} a_n$

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf ceux de rangs $n_p : u_{n_p} = p$

$$\text{D'une part } \sum_{n=p}^{(p+1)^2-1} a_n u_n = p a_{n_p},$$

$$\text{d'autre part } \sum_{n=p}^{(p+1)^2-1} a_n \geq \sum_{n=p}^{(p+1)^2-1} a_{n_p} = 2p a_{n_p}$$

$$\text{Donc pour tout } p, \sum_{n < p^2} a_n u_n \leq \sum_{n < p^2} a_n :$$

la série (à termes positifs) de terme général $a_n u_n$ converge (sommes partielles bornées) sans que la suite (u_n) soit bornée.

En conclusion aucune suite n'est universelle