

Existe-t-il $(f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : f \circ f(n) = n^2$?

Analyse de l'équation

Soit f une éventuelle solution et n un entier naturel.

- Pour n_1 et n_2 entiers naturels $f(n_1) = f(n_2) \implies f(f(n_1)) = f(f(n_2)) \implies n_1^2 = n_2^2 \implies n_1 = n_2$:
 f est injective

- $f(n^2) = f(f \circ f(n)) = f \circ f(f(n)) = (f(n))^2$,

- Si $n \in \{0, 1\}$, $n = n^2$, $f(n) = f(n^2) = (f(n))^2$: $f(n) \in \{0, 1\}$. f étant injective, $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$

- De $f(n^2) = (f(n))^2$ on déduit que pour tout entier naturel p , $f(n^{(2^p)}) = (f(n))^{(2^p)}$.

Or tout carré $c > 1$ aboutit à un non-carré b après quelques itérations de la racine carrée : $c = b^{(2^p)}$ où b n'est pas le carré d'un entier.

f est donc entièrement déterminée par les images de 0,1 et des non-carrés

Description d'une solution

Je note $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des entiers naturels qui ne sont pas des carrés d'entiers. $u_0 = 2, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 6 \dots$

Comme déjà dit plus haut, si c est le carré d'un entier, $c > 1$, il est le résultat de la répétition de la mise au carré d'un entier qui lui n'est pas le carré d'un entier : $\exists (k, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* / c = u_k^{(2^p)}$.

Soit s l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

- $s(0) = 0$ et $s(1) = 1$,
- $\forall k \in \mathbb{N}, s(u_{2k}) = u_{2k+1}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, s(u_{2k+1}) = u_{2k}^2$
- Image d'un carré strictement plus grand que 1 : $s(u_k^{(2^p)}) = (s(u_k))^{2^p}$.

La relation $s \circ s(n) = n^2$ est vérifiée dans tous les cas :

- $s(0) = 0$ donc $s(s(0)) = 0 = 0^2$
- $s(1) = 1$ donc $s(s(1)) = 1 = 1^2$
- Si u_{2k} est un non-carré de rang pair, $n = u_{2k}$: $s(s(u_{2k})) = s(u_{2k+1}) = u_{2k}^2$
- Si u_{2k+1} est un non-carré de rang impair, $s(s(u_{2k+1})) = s(u_{2k}^2) = (u_{2k})^2 = u_{2k+1}^2$
- Si n est un carré, $n > 1$, $n = u_k^{(2^p)}$,

$$s(s(n)) = s\left(s\left(u_k^{(2^p)}\right)\right) = s\left((s(u_k))^{(2^p)}\right) = \begin{cases} s\left(u_{k+1}^{(2^p)}\right) = s(u_{k+1})^{(2^p)} & \text{si } k \text{ est pair} \\ s\left(u_{k-1}^{(2^{p+1})}\right) = s(u_{k-1})^{(2^{p+1})} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

$$= u_k^{(2^{p+1})} = n^2 \text{ que } k \text{ soit pair ou impair.}$$

Programme python calculant et affichant les premières valeurs de s

Je crée la liste S (de taille nb) des images des premiers entiers naturels dans l'ordre suivant : je parcours la liste et quand je tombe sur une valeur vide, je la renseigne ainsi que celles de ses itérées par s

```
nb=100
```

```
S = [None]*nb      # S est une liste, je la nomme en majuscule
```

```
S[0],S[1] = 0,1
```

```
for n in range(nb) :
```

```
    if S[n]==None :
```

```
        S[n] = n+1
```

```
        x,y = n,S[n]
```

```
        while x < nb :
```

```
            if y < nb :
```

```
                S[y] = x**2
```

```
                if S[y] < nb :
```

```
                    S[ S[y] ] = y**2
```

```
            x,y = x**2,y**2
```

```
for n in range(nb) :
```

```
    print(n," -> ", S[n])
```